

Решение контрольной работы выполнено на сайте www.matburo.ru

Переходите на сайт, смотрите больше примеров или закажите свою работу

https://www.matburo.ru/sub_vuz.php?p=vzfeitv

©МатБюро. Решение задач по математике, экономике, программированию

ВЗФЭИ. Контрольная работа №4

Вариант 9

Задача 1. По схеме собственно-случайной бесповторной выборки из 1500 участников соревнования было отобрано 100 человек. Их распределение по числу набранных баллов дано в таблице:

Число набранных баллов	52-56	56-60	60-64	64-68	68-72	72-76	Итого
Число участников	9	11	19	30	21	10	100

Найти:

А) границы, в которых с вероятностью 0,9861 будет находиться среднее число набранных баллов для всех участников соревнований;

Б) вероятность того, что доля всех участников соревнований, набравших не менее 68 баллов, отличается от доли таких участников в выборке не более чем на 0,1 (по абсолютной величине);

В) объем выборки, при котором те же границы для среднего числа участников (см. п. а)) можно гарантировать с вероятностью 0,97.

Решение. Вычислим сначала числовые характеристики выборки. Построим соответствующий простой вариационный ряд, выбрав в качестве вариант середины интервалов:

x_i	54	58	62	66	70	74	Итого
n_i	9	11	19	30	21	10	100

Найдем среднее:

Решение контрольной работы выполнено на сайте www.matburo.ru

Переходите на сайт, смотрите больше примеров или закажите свою работу

https://www.matburo.ru/sub_vuz.php?p=vzfeitv

©МатБюро. Решение задач по математике, экономике, программированию

$$\bar{x} = \frac{1}{n} \sum x_i n_i = \frac{1}{100} 6492 = 64,92$$

Найдем исправленную дисперсию:

$$S^2 = \frac{1}{n-1} \sum (x_i - \bar{x})^2 n_i = \frac{1}{99} 3163,36 \approx 31,953.$$

Найдем исправленное среднеквадратичное отклонение: $S \approx 5,653$.

Расчеты в таблице ниже:

x_i	54	58	62	66	70	74	Сумма
n_i	9	11	19	30	21	10	100
$x_i n_i$	486	638	1178	1980	1470	740	6492
$(x_i - \bar{x})^2 n_i$	1073,218	526,7504	162,0016	34,992	541,9344	824,464	3163,36

А) Найдем границы, в которых с вероятностью 0,9861 будет находиться среднее число набранных баллов для всех участников соревнований.

Используем формулу:

$$\bar{x} - \Delta_x < m < \bar{x} + \Delta_x, \text{ где } \Delta_x - \text{предельная ошибка выборки, } \Delta_x = t \cdot \mu_x = t \cdot \sqrt{\frac{S^2}{n} \left(1 - \frac{n}{N}\right)}. \text{ Здесь}$$

доверительный коэффициент t определяется по значению вероятности,

$$t = \Phi^{-1}(\gamma/2) = \Phi^{-1}(0,9861/2) = \Phi^{-1}(0,49305) = 2,46.$$

Решение контрольной работы выполнено на сайте www.matburo.ru

Переходите на сайт, смотрите больше примеров или закажите свою работу

https://www.matburo.ru/sub_vuz.php?p=vzfeitv

©МатБюро. Решение задач по математике, экономике, программированию

Подставляем и получаем: $\Delta_x = 2,46 \cdot \sqrt{\frac{31,953}{100} \left(1 - \frac{100}{1500}\right)} \approx 1,343.$

Тогда искомый интервал:

$$64,92 - 1,343 < m < 64,92 + 1,343,$$

$$63,577 < m < 66,263.$$

Б) Найдем вероятность того, что доля всех участников соревнований, набравших не менее 68 баллов, отличается от доли таких участников в выборке не более чем на 0,1 (по абсолютной величине).

Выборочная доля всех участников соревнований, набравших не менее 68 баллов, равна

$$w = \frac{21+10}{100} = 0,31.$$

Предельная ошибка для доли $\Delta_w = t \sqrt{\frac{w(1-w)}{n} \left(1 - \frac{n}{N}\right)}$. Получаем:

$$\Delta_w = t \sqrt{\frac{0,31(1-0,31)}{100} \left(1 - \frac{100}{1500}\right)} \leq 0,1,$$

$$0,0447t \leq 0,1,$$

$$t \leq 2,24,$$

$$\gamma \leq 2\Phi(2,24) = 2 \cdot 0,4875 = 0,975.$$

Вероятность 0,975.

В) Найдем объем выборки, при котором те же границы для среднего числа участников (см. п. а)) можно гарантировать с вероятностью 0,97.

Переходите на сайт, смотрите больше примеров или закажите свою работу

https://www.matburo.ru/sub_vuz.php?p=vzfeitv

©МатБюро. Решение задач по математике, экономике, программированию

То есть найдем объем выборки n , который гарантирует такую же предельную ошибку для среднего $\Delta_x = 1,343$.

Используем формулу: $n = \frac{t^2 S^2 N}{\Delta_x^2 N + t^2 S^2}$. Вычислим

$$t = \Phi^{-1}(\gamma/2) = \Phi^{-1}(0,97/2) = \Phi^{-1}(0,485) \approx 2,17.$$

$$\text{Получаем: } n = \frac{2,17^2 \cdot 31,953 \cdot 1500}{1,343^2 \cdot 1500 + 2,17^2 \cdot 31,953} \approx 79.$$

Задача 2. По данным задачи 1, используя χ^2 -критерий Пирсона, на уровне значимости $\alpha = 0,05$ проверить гипотезу о том, что случайная величина X – число набранных баллов – распределена по нормальному закону. Построить на одном чертеже гистограмму эмпирического распределения и соответствующую нормальную кривую.

Решение. Пронормируем случайную величину X , то есть перейдем к величине $Z = \frac{x - \bar{x}}{S}$,

вычислим концы интервалов по формулам $z_i = \frac{x_i - \bar{x}}{S}$, $z_{i+1} = \frac{x_{i+1} - \bar{x}}{S}$.

Вычислим теоретические (выравнивающие частоты) $n_i' = nP_i$, где $n = 100$, $P_i = \Phi(z_{i+1}) - \Phi(z_i)$ – вероятность попадания в интервал (z_i, z_{i+1}) , $\Phi(z)$ – функция Лапласа. Для нахождения значений составим расчетную таблицу:

x_i	x_{i+1}	n_i	z_i	z_{i+1}	$\Phi(z_i)$	$\Phi(z_{i+1})$	P_i	n_i'	$\frac{(n_i - n_i')^2}{n_i'}$
-------	-----------	-------	-------	-----------	-------------	-----------------	-------	--------	-------------------------------

Решение контрольной работы выполнено на сайте www.matburo.ru

Переходите на сайт, смотрите больше примеров или закажите свою работу

https://www.matburo.ru/sub_vuz.php?p=vzfeitv

©МатБюро. Решение задач по математике, экономике, программированию

52	56	9	$-\infty$	-1,58	-0,50	-0,44	0,06	5,73	1,869
56	60	11	-1,58	-0,87	-0,44	-0,31	0,13	13,48	0,455
60	64	19	-0,87	-0,16	-0,31	-0,06	0,24	24,33	1,168
64	68	30	-0,16	0,54	-0,06	0,21	0,27	27,17	0,294
68	72	21	0,54	1,25	0,21	0,39	0,19	18,77	0,264
72	76	10	1,25	∞	0,39	0,50	0,11	10,52	0,026

Сумма

100,00

100,00

4,076

Сравним эмпирические и теоретические частоты, используя критерий Пирсона:

$$\chi^2 = \sum \frac{(n_i - n_i')^2}{n_i'} = 4,076.$$

По таблице критических точек распределения χ^2 по уровню значимости $\alpha = 0,05$ и числу степеней свободы $k = 6 - 3 = 3$, находим $\chi^2_{кр.} = 7,8$. Так как $\chi^2_{набл.} = 4,076 < \chi^2_{кр.} = 7,8$, то следует принять гипотезу о нормальном распределении данной величины.

Построим теоретическую нормальную кривую

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}\right) = \frac{1}{5,653\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{(x-64,92)^2}{2 \cdot 31,953}\right)$$

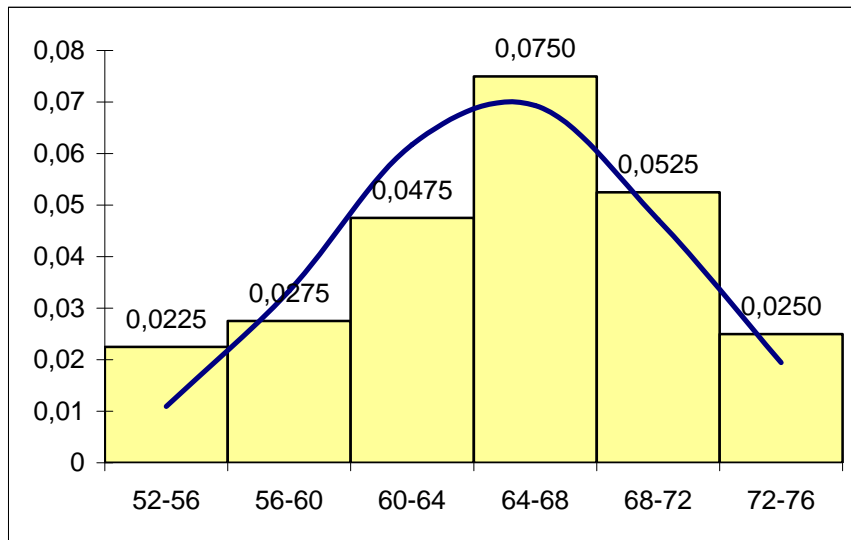
и гистограмму на одном чертеже.

Решение контрольной работы выполнено на сайте www.matburo.ru

Переходите на сайт, смотрите больше примеров или закажите свою работу

https://www.matburo.ru/sub_vuz.php?p=vzfeitv

©МатБюро. Решение задач по математике, экономике, программированию



Расчетная таблица:

относит. частота $\frac{n_i}{4 \cdot 100}$	0,0225	0,0275	0,0475	0,075	0,0525	0,025
плотность распр. $f(x_i)$	0,01092	0,03336	0,06176	0,0693	0,04713	0,01943

Задача 3. В таблице приведено распределение 120 коров по дневному надою Y (в кг) и по жирности X (в %):

$x \setminus y$	7	9	11	13	15	Итого
3,3				8		8
3,5			2	16	8	26

Решение контрольной работы выполнено на сайте www.matburo.ru

Переходите на сайт, смотрите больше примеров или закажите свою работу

https://www.matburo.ru/sub_vuz.php?p=vzfeitv

©МатБюро. Решение задач по математике, экономике, программированию

3,7		4	16	10	2	32
3,9	2	6	10	2		20
4,1	8	6	20			34
Итого	10	16	48	36	10	120

Необходимо:

1) Вычислить групповые средние \bar{x}_i и \bar{y}_j и построить эмпирические линии регрессии;

2) Предполагая, что между переменными X и Y существует линейная корреляционная зависимость:

а) найти уравнения прямых регрессии, построить их графики на одном чертеже с эмпирическими линиями регрессии и дать экономическую интерпретацию полученных уравнений;

б) вычислить коэффициент корреляции, на уровне значимости $\alpha = 0,05$ оценить его значимость и сделать вывод о тесноте и направлении связи между переменными X и Y ;

в) используя соответствующее уравнение регрессии, оценить средний процент жирности молока для коров, дневной удой которых составляет 12 кг.

Решение.

1) Найдем групповые средние по формулам: $\bar{x}_j = \frac{\sum_{i=1}^5 x_i n_{ij}}{n_j}$; $\bar{y}_i = \frac{\sum_{j=1}^5 y_j n_{ij}}{n_i}$.

Вычисления проведем в Excel, получаем:

\bar{x}_j	4,060	3,925	3,900	3,533	3,540
y_j	7	9	11	13	15

Решение контрольной работы выполнено на сайте www.matburo.ru

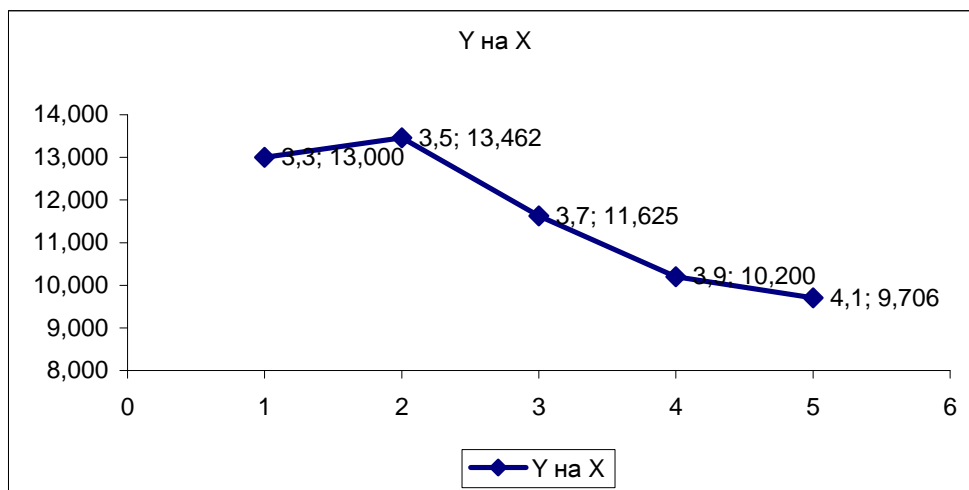
Переходите на сайт, смотрите больше примеров или закажите свою работу

https://www.matburo.ru/sub_vuz.php?p=vzfeitv

©МатБюро. Решение задач по математике, экономике, программированию

x_i	\bar{y}_i
3,3	13,000
3,5	13,462
3,7	11,625
3,9	10,200
4,1	9,706

Построим эмпирические линии регрессии (Y на X , X на Y).

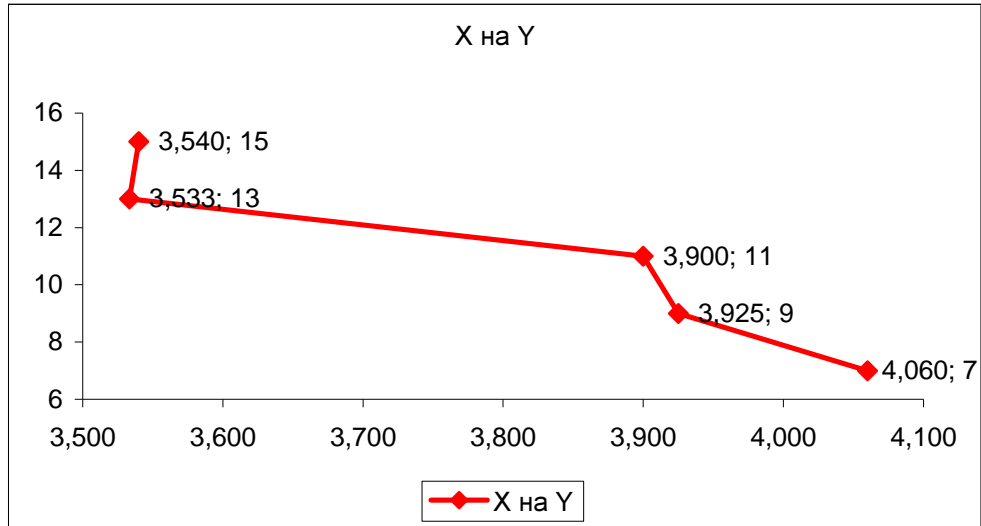


Решение контрольной работы выполнено на сайте www.matburo.ru

Переходите на сайт, смотрите больше примеров или закажите свою работу

https://www.matburo.ru/sub_vuz.php?p=vzfeitv

©МатБюро. Решение задач по математике, экономике, программированию



Из вида эмпирических линий регрессии можно заключить, что между переменными наблюдается линейная зависимость.

Найдем уравнения прямых линий регрессии. Вычислим необходимые величины (расчеты в таблицах ниже):

x_i	3,3	3,5	3,7	3,9	4,1	Сумма
n_i	8	26	32	20	34	120
$x_i \cdot n_i$	26,4	91	118,4	78	139,4	453,2
$x_i^2 \cdot n_i$	87,12	318,5	438,08	304,2	571,54	1719,44

y_j	7	9	11	13	15	Сумма
n_j	10	16	48	36	10	120
$y_j \cdot n_j$	70	144	528	468	150	1360

Решение контрольной работы выполнено на сайте www.matburo.ru

Переходите на сайт, смотрите больше примеров или закажите свою работу

https://www.matburo.ru/sub_vuz.php?p=vzfeitv

©МатБюро. Решение задач по математике, экономике, программированию

$y_j^2 \cdot n_j$	490	1296	5808	6084	2250	15928
-------------------	-----	------	------	------	------	--------------

$$\sum_{i=1}^5 x_i n_i = 453,2, \quad \sum_{i=1}^5 x_i^2 n_i = 1719,44,$$

$$\bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^5 x_i n_i}{n} = \frac{453,2}{120} = 3,777,$$

$$s_x^2 = \frac{\sum_{i=1}^5 x_i^2 n_i}{n} - \bar{x}^2 = \frac{1719,44}{120} - 3,777^2 = 0,065$$

$$\sum_{j=1}^5 y_j n_j = 1360, \quad \sum_{j=1}^5 y_j^2 n_j = 15928,$$

$$\bar{y} = \frac{\sum_{j=1}^5 y_j n_j}{n} = \frac{1360}{120} = 11,333,$$

$$s_y^2 = \frac{\sum_{j=1}^5 y_j^2 n_j}{n} - \bar{y}^2 = \frac{15928}{120} - 11,333^2 = 4,289.$$

$$\sum_{i=1}^5 \sum_{j=1}^5 x_i y_j n_{ij} = 5093,2$$

$$\mu = \bar{xy} - \bar{x} \cdot \bar{y} = \frac{\sum_{i=1}^5 \sum_{j=1}^5 x_i y_j n_{ij}}{n} - \bar{x} \cdot \bar{y} = \frac{5093,2}{120} - 3,777 \cdot 11,333 = -0,359$$

$$b_{yx} = \frac{\mu}{s_x^2} = \frac{-0,359}{0,065} = -5,483$$

Решение контрольной работы выполнено на сайте www.matburo.ru

Переходите на сайт, смотрите больше примеров или закажите свою работу

https://www.matburo.ru/sub_vuz.php?p=vzfeitv

©МатБюро. Решение задач по математике, экономике, программированию

$$b_{xy} = \frac{\mu}{s_y^2} = \frac{-0,359}{4,289} = -0,084$$

Уравнения прямых регрессии:

$$y_x - \bar{y} = b_{yx}(x - \bar{x}),$$

$$y_x - 11,333 = -5,483(x - 3,777),$$

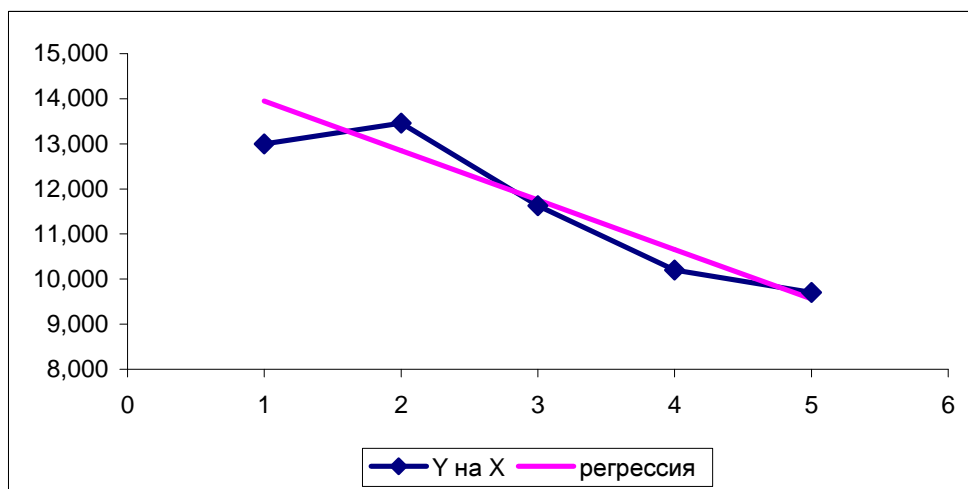
$$y_x = -5,483x + 32,042.$$

$$x_y - \bar{x} = b_{xy}(y - \bar{y}),$$

$$x_y - 3,777 = -0,084(y - 11,333),$$

$$x_y = -0,084y + 4,729.$$

Построим графики линий регрессии на одном чертеже с эмпирическими линиями регрессии.

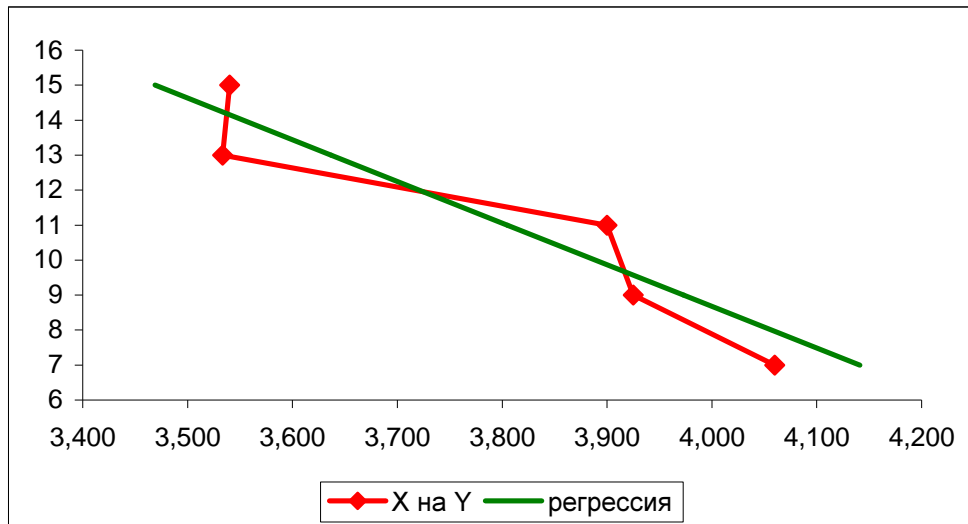


Решение контрольной работы выполнено на сайте www.matburo.ru

Переходите на сайт, смотрите больше примеров или закажите свою работу

https://www.matburo.ru/sub_vuz.php?p=vzfeitv

©МатБюро. Решение задач по математике, экономике, программированию



Экономическая интерпретация полученных уравнений:

$y_x = -5,483x + 32,042$ - при увеличении жирности молока на 1%, дневной надой уменьшается в среднем на 5,483 кг.

$x_y = -0,084y + 4,729$ - при увеличении дневного надоя на 1 кг, жирность молока уменьшается в среднем на 0,084 %.

Вычислим коэффициент корреляции $r = \sqrt{b_{yx} \cdot b_{xy}} = \sqrt{5,483 \cdot 0,084} \approx 0,679$

На уровне значимости $\alpha = 0,05$ оценим значимость коэффициента корреляции. Вычислим

$$\text{значение критерия } t = \frac{r\sqrt{n-2}}{\sqrt{1-r^2}} = \frac{0,679\sqrt{120-2}}{\sqrt{1-0,679^2}} \approx 10,047$$

По таблице критерия Стьюдента для уровня значимости 0,05 находим $t_{0,95;118} = 1,98$. Так как наблюдаемое значение 10,047 больше критического, коэффициент корреляции значим.

Решение контрольной работы выполнено на сайте www.matburo.ru

Переходите на сайт, смотрите больше примеров или закажите свою работу

https://www.matburo.ru/sub_vuz.php?p=vzfeitv

©МатБюро. Решение задач по математике, экономике, программированию

Связь между переменными X и Y тесная, обратная.

Используя соответствующее уравнение регрессии, оценим средний процент жирности молока для коров, дневной удой которых составляет 12 кг:

$$x_y(12) = -0,084 \cdot 12 + 4,729 \approx 3,721\% .$$