

Решение контрольной работы выполнено на сайте www.matburo.ru

Переходите на сайт, смотрите больше примеров или закажите свою работу

https://www.matburo.ru/sub_vuz.php?p=vzfeitv

©МатБюро. Решение задач по математике, экономике, программированию

ВЗФЭИ. Контрольная работа №3

Вариант 9

Задача 1. В поселке имеется 6 производственных предприятий, 8 магазинов и 4 банка. Вероятность того, что имеется свободная вакансия бухгалтера равна: 0,4 для предприятия, 0,3 для магазина, 0,6 для банка.

- 1) Найти вероятность того, что в поселке имеется свободная вакансия бухгалтерия.
- 2) Известно, что в поселке есть свободная вакансия бухгалтера. Найти вероятность того, что эта вакансия – в банке.

Решение. Введем полную группу гипотез:

H_1 = (Рассматривается производственное предприятие),

H_2 = (Рассматривается магазин),

H_3 = (Рассматривается банк).

Вероятности вычислим по классическому определению вероятности (отношение числа предприятий данной категории к общему числу предприятий): $P(H_1) = \frac{6}{6+8+4} = \frac{6}{18} = \frac{1}{3}$,

$P(H_2) = \frac{8}{6+8+4} = \frac{8}{18} = \frac{4}{9}$, $P(H_3) = \frac{4}{6+8+4} = \frac{4}{18} = \frac{2}{9}$.

Введем событие A = (На предприятии есть свободная вакансия бухгалтера). Выпишем условные вероятности: $P(A | H_1) = 0,4$, $P(A | H_2) = 0,3$, $P(A | H_3) = 0,6$.

1) Вероятность того, что в поселке имеется свободная вакансия бухгалтерия найдем по формуле полной вероятности:

Решение контрольной работы выполнено на сайте www.matburo.ru

Переходите на сайт, смотрите больше примеров или закажите свою работу

https://www.matburo.ru/sub_vuz.php?p=vzfeitv

©МатБюро. Решение задач по математике, экономике, программированию

$$\begin{aligned} P(A) &= P(A | H_1)P(H_1) + P(A | H_2)P(H_2) + P(A | H_3)P(H_3) = \\ &= \frac{1}{3} \cdot 0,4 + \frac{4}{9} \cdot 0,3 + \frac{2}{9} \cdot 0,6 = 0,4. \end{aligned}$$

2) Вероятность $P(H_3 | A)$ того, что вакансия бухгалтера будет именно в банке, если известно, что она есть, найдем по формуле Байеса:

$$P(H_3 | A) = \frac{P(A | H_3)P(H_3)}{P(A)} = \frac{2/9 \cdot 0,6}{0,4} \approx 0,333.$$

Ответ: 1) 0,4; 2) 0,333.

Задача 2. Путем длительных наблюдений установлено, что в данной местности в сентябре в среднем бывает 12 дождливых дней. Что вероятнее: из 6 наудачу взятых дней сентября будет два или три дождливых дня?

Решение. Будем считать, что вероятность того, что день дождливый, равна $p = \frac{12}{30} = \frac{2}{5} = 0,4$.

Попадаем в условие схемы Бернулли с параметрами: $n = 6$ (дней), $p = 0,4$ (вероятность дождя).

Вероятность того, что из n дней будет ровно k дождливых найдем по формуле Бернулли:

$$P_n(k) = C_n^k p^k (1-p)^{n-k} = C_6^k \cdot 0,4^k \cdot 0,6^{6-k}.$$

Получаем:

Два дождливых дня, $k = 2$:

Решение контрольной работы выполнено на сайте www.matburo.ru

Переходите на сайт, смотрите больше примеров или закажите свою работу

https://www.matburo.ru/sub_vuz.php?p=vzfeitv

©МатБюро. Решение задач по математике, экономике, программированию

$$P_6(2) = C_6^2 \cdot 0,4^2 \cdot 0,6^4 = \frac{6!}{2!4!} \cdot 0,4^2 \cdot 0,6^4 = \frac{5 \cdot 6}{1 \cdot 2} \cdot 0,4^2 \cdot 0,6^4 \approx 0,311.$$

Три дождливых дня, $k = 3$:

$$P_6(3) = C_6^3 \cdot 0,4^3 \cdot 0,6^3 = \frac{6!}{3!3!} \cdot 0,4^3 \cdot 0,6^3 = \frac{4 \cdot 5 \cdot 6}{1 \cdot 2 \cdot 3} \cdot 0,4^3 \cdot 0,6^3 \approx 0,276..$$

Вероятнее, что будет 2 дождливых дня.

Ответ: 2 дождливых дня.

Задача 3. Нарушение правил дорожного движения приводит к аварии с вероятностью 0,01. Найти вероятность попасть в аварию хотя бы один раз при 100 нарушениях.

Решение. Имеем схему Бернулли с параметрами $n = 100$ (количество нарушений), $p = 0,01$ (вероятность попасть в аварию). Будем использовать формулу $P_n(k) = C_n^k p^k (1-p)^{n-k} = C_{100}^k \cdot 0,01^k \cdot 0,99^{100-k}$ (вероятность того, что из n нарушений приведут к аварии ровно k нарушений).

Вероятность попасть в аварию хотя бы один раз при 100 нарушениях:

$$P_{100}(k \geq 1) = 1 - P_{100}(k < 1) = 1 - P_{100}(0) = 1 - C_{100}^0 \cdot 0,01^0 \cdot 0,99^{100-0} = 1 - 0,99^{100} \approx 0,634.$$

Эту же вероятность можно найти по приближенной формуле Пуассона:

Решение контрольной работы выполнено на сайте www.matburo.ru

Переходите на сайт, смотрите больше примеров или закажите свою работу

https://www.matburo.ru/sub_vuz.php?p=vzfeitv

©МатБюро. Решение задач по математике, экономике, программированию

$P_n(k) = \frac{(np)^k}{k!} e^{-np} = \frac{1}{k!} e^{-1}$ - вероятность того, что из n нарушений приведут к аварии ровно k нарушений.

Вероятность попасть в аварию хотя бы один раз при 100 нарушениях:

$$P_{100}(k \geq 1) = 1 - P_{100}(k < 1) = 1 - P_{100}(0) = 1 - \frac{1}{0!} e^{-1} = 1 - e^{-1} \approx 0,632.$$

Ответ: 0,63.

Задача 4. В урне 2 белых и 3 черных шара. Из нее последовательно вынимают шары до тех пор, пока не появится белый шар. Составить закон распределения случайной величины X - числа извлеченных шаров. Найти:

А) среднее квадратическое отклонение $\sigma(X)$;

Б) функцию распределения $F(X)$,

В) вероятность $P(X > 2)$.

Решение. Найдем закон распределения дискретной случайной величины X = (Число вынутых шаров). X может принимать значения 1, 2, 3 и 4. Найдем соответствующие вероятности.

$$X = 1, \text{ если первый же вытащенный шар будет белым, поэтому } P(X = 1) = \frac{2}{2+3} = \frac{2}{5}.$$

$$X = 2, \text{ если первый вытащенный шар будет черным, а второй - белым, поэтому } P(X = 2) = \frac{3}{5} \cdot \frac{2}{4} = \frac{3}{10}.$$

Решение контрольной работы выполнено на сайте www.matburo.ru

Переходите на сайт, смотрите больше примеров или закажите свою работу

https://www.matburo.ru/sub_vuz.php?p=vzfeitv

©МатБюро. Решение задач по математике, экономике, программированию

$X = 3$, если первый и второй вытащенные шары будут черными, а третий - белым, поэтому

$$P(X = 3) = \frac{3}{5} \cdot \frac{2}{4} \cdot \frac{2}{3} = \frac{1}{5}.$$

$X = 4$, если первый, второй и третий вытащенные шары будут черными, а четвертый - белым,

$$\text{поэтому } P(X = 4) = \frac{3}{5} \cdot \frac{2}{4} \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{2}{2} = \frac{1}{10}.$$

Получили закон распределения:

x_i	1	2	3	4
p_i	2/5	3/10	1/5	1/10

Расчеты проведены верно, так как сумма вероятностей $2/5 + 3/10 + 1/5 + 1/10 = 1$.

Найдем характеристики случайной величины X .

Математическое ожидание

$$MX = \sum x_i p_i = 1 \cdot \frac{2}{5} + 2 \cdot \frac{3}{10} + 3 \cdot \frac{1}{5} + 4 \cdot \frac{1}{10} = 2.$$

Дисперсия:

$$DX = \sum x_i^2 p_i - (MX)^2 = 1 \cdot \frac{2}{5} + 4 \cdot \frac{3}{10} + 9 \cdot \frac{1}{5} + 16 \cdot \frac{1}{10} - 2^2 = 5 - 4 = 1.$$

А) Тогда среднее квадратическое отклонение $\sigma(X) = \sqrt{DX} = 1$.

Б) Найдем функцию распределения $F(x) = P(X < x)$.

Решение контрольной работы выполнено на сайте www.matburo.ru

Переходите на сайт, смотрите больше примеров или закажите свою работу

https://www.matburo.ru/sub_vuz.php?p=vzfeitv

©МатБюро. Решение задач по математике, экономике, программированию

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x \leq 1, \\ 0,4, & 1 < x \leq 2, \\ 0,7, & 2 < x \leq 3, \\ 0,9, & 3 < x \leq 4, \\ 1, & x > 4. \end{cases}$$

В) Найдем вероятность $P(X > 2)$:

$$P(X > 2) = P(X = 3) + P(X = 4) = 0,2 + 0,1 = 0,3.$$

Задача 5. Размер вклада клиента сберегательного банка – случайная величина, распределенная по биномиальному закону с математическим ожиданием $M(X) = 15$ тыс. руб. и дисперсией $D(X) = 0,4$. Необходимо:

- 1) Используя неравенство Чебышева, оценить вероятность того, что размер вклада наудачу взятого вкладчика будет заключен в границах от 14 до 16 тыс. руб.;
- 2) Найти вероятность того же события, используя следствие из интегральной теоремы Муавра-Лапласа;
- 3) Пояснить различие результатов.

Решение.

1) Используем неравенство Чебышева: $P(|X - MX| < \varepsilon) > 1 - \frac{D(X)}{\varepsilon^2}$. Подставляем данные:

$M(X) = 15$, $D(X) = 0,4$, $\varepsilon = 1$. Получаем:

Решение контрольной работы выполнено на сайте www.matburo.ru

Переходите на сайт, смотрите больше примеров или закажите свою работу

https://www.matburo.ru/sub_vuz.php?p=vzfeitv

©МатБюро. Решение задач по математике, экономике, программированию

$$P(14 < X < 16) = P(|X - 15| < 1) > 1 - \frac{0,4}{1^2} = 0,6$$

2) Вычислим вероятность того же события, используя следствие из интегральной теоремы

Муавра-Лапласа. Используем формулу: $P(|X - a| < \delta) = 2\Phi\left(\frac{\delta}{\sigma}\right)$. Подставляем данные: $a = 15$,

$\sigma = \sqrt{0,4}$, $\delta = 1$. Получаем:

$$P(|X - 15| < 1) = 2\Phi\left(\frac{1}{\sqrt{0,4}}\right) = 2\Phi(1,58) = 2 \cdot 0,4429 = 0,8858.$$

3) Неравенство Чебышева дает более грубую оценку вероятности, так как справедливо для любой случайной величины и устанавливает нижнюю оценку для вероятности, тогда как вторая формула использует дополнительные данные (а именно, что величина распределена по биномиальному закону) и дает приближенное значение (а не оценку).