

Решение типовика выполнено на сайте [www.matburo.ru](http://www.matburo.ru)

Переходите на сайт, смотрите больше примеров или закажите свою работу

[https://www.matburo.ru/sub\\_vuz.php?p=mireatv](https://www.matburo.ru/sub_vuz.php?p=mireatv)

©МатБюро. Решение задач по математике, экономике, программированию

### МИРЭА. Пример решения типового расчета по теории вероятностей

#### Вариант 16

**Задача 1.** Из двух орудий поочередно ведется стрельба по цели до первого попадания одним из орудий. Вероятность попадания в цель первым орудием равна  $p_1=0,4$ , вторым -  $p_2=0,65$ . Начинает стрельбу первое орудие. Составить законы распределения дискретных случайных величин  $X$  и  $Y$  - числа израсходованных снарядов соответственно первым и вторым орудием.

**Решение.** Введем дискретные случайные величины:

$X$  = (Число израсходованных первым орудием снарядов),

$Y$  = (Число израсходованных вторым орудием снарядов).

Они могут принимать значения 1, 2, 3, ... (для  $X$ ) и 0, 1, 2, ... (для  $Y$ ). Найдем соответствующие вероятности и составим законы распределения.

$X = 1$ , если первый выстрел попал в цель, вероятность этого  $P(X = 1) = 0,4$ . Это же соответствует событию  $Y = 0$  (второе орудие вообще не стреляет в этом случае),  $P(Y = 0) = 0,4$ .

$Y = 1$ , если первое орудие не попало в цель, а второе попало своим первым выстрелом, вероятность  $P(Y = 1) = (1 - 0,4) \cdot 0,65 = 0,6 \cdot 0,65$

$X = 2$ , если при первых выстрелах оба орудия дали промах, при втором выстреле первое орудие попало в цель, вероятность  $P(X = 2) = (1 - 0,4) \cdot (1 - 0,65) \cdot 0,4 = 0,6 \cdot 0,35 \cdot 0,4$ .

Решение типовика выполнено на сайте [www.matburo.ru](http://www.matburo.ru)

Переходите на сайт, смотрите больше примеров или закажите свою работу

[https://www.matburo.ru/sub\\_vuz.php?p=mireatv](https://www.matburo.ru/sub_vuz.php?p=mireatv)

©МатБюро. Решение задач по математике, экономике, программированию

$Y = 2$ , если при первых выстрелах оба орудия дали промах, при втором выстреле первое орудие дало промах, а второе попало в цель, вероятность

$$P(Y = 2) = (1 - 0,4) \cdot (1 - 0,65) \cdot (1 - 0,4) \cdot 0,65 = 0,6^2 \cdot 0,35 \cdot 0,65.$$

$X = 3$ , если при первых двух выстрелах оба орудия дали промах, при третьем выстреле первое орудие попало в цель, вероятность  $P(X = 3) = (1 - 0,4)^2 \cdot (1 - 0,65)^2 \cdot 0,4 = 0,6^2 \cdot 0,35^2 \cdot 0,4.$

$Y = 3$ , если при первых двух выстрелах оба орудия дали промах, при третьем выстреле первое орудие дало промах, а второе попало в цель, вероятность

$$P(Y = 3) = (1 - 0,4)^2 \cdot (1 - 0,65)^2 \cdot (1 - 0,4) \cdot 0,65 = 0,6^3 \cdot 0,35^2 \cdot 0,65.$$

Аналогично продолжая далее, получим, что законы распределения следующие:

$$P(X = k) = 0,6^{k-1} \cdot 0,35^{k-1} \cdot 0,4, \quad k = 1, 2, 3, \dots$$

$$P(Y = 0) = 0,4, \quad P(Y = k) = 0,6^k \cdot 0,35^{k-1} \cdot 0,65, \quad k = 1, 2, 3, \dots$$

**Задача 2.** Дана дифференциальная функция непрерывной случайной величины  $X$ :

Переходите на сайт, смотрите больше примеров или закажите свою работу

[https://www.matburo.ru/sub\\_vuz.php?p=mireatv](https://www.matburo.ru/sub_vuz.php?p=mireatv)

©МатБюро. Решение задач по математике, экономике, программированию

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x \leq 1, \\ C(x^2 - x), & 1 < x \leq 2, \\ 0, & x > 2. \end{cases}$$

Найти: постоянную  $C$ , интегральную функцию  $F(x)$ . Вероятность попадания СВ  $X$  в интервал  $(0,5; 1,5)$ .

**Решение.** Найдем константу  $C$  из условия нормировки:  $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = 1$ . Получаем:

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = C \int_1^2 (x^2 - x)dx = C \left( \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{2}x^2 \right) \Big|_1^2 = C \left( \frac{8}{3} - \frac{4}{2} - \frac{1}{3} + \frac{1}{2} \right) = \frac{5}{6}C = 1, \text{ откуда находим}$$

$$C = \frac{6}{5}, \text{ то есть}$$

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x \leq 1, \\ \frac{6}{5}(x^2 - x), & 1 < x \leq 2, \\ 0, & x > 2. \end{cases}$$

Найдем функцию распределения  $F(x)$  по определению  $F(x) = \int_{-\infty}^x f(t)dt$ . Получаем:

$$\text{Пусть } x < 1, \text{ тогда } f(x) = 0, \text{ тогда } F(x) = \int_{-\infty}^x f(t)dt = \int_{-\infty}^x 0dt = 0.$$

Пусть  $1 < x < 2$ , тогда  $f(x) = \frac{6}{5}(x^2 - x)$ , тогда

$$\begin{aligned} F(x) &= \int_{-\infty}^x f(t)dt = \int_{-\infty}^1 0dt + \frac{6}{5} \int_1^x (t^2 - t)dt = \frac{6}{5} \left( \frac{1}{3}t^3 - \frac{1}{2}t^2 \right) \Big|_1^x = \frac{6}{5} \left( \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{3} + \frac{1}{2} \right) = \\ &= \frac{6}{5} \left( \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{6} \right) = \frac{1}{5} (2x^3 - 3x^2 + 1). \end{aligned}$$

Переходите на сайт, смотрите больше примеров или закажите свою работу

[https://www.matburo.ru/sub\\_vuz.php?p=mireatv](https://www.matburo.ru/sub_vuz.php?p=mireatv)

©МатБюро. Решение задач по математике, экономике, программированию

Пусть  $x > 2$ , тогда  $f(x) = 0$ , тогда

$$F(x) = \int_{-\infty}^x f(t)dt = \int_{-\infty}^1 0dt + \frac{6}{5} \int_1^2 (t^2 - t) dt + \int_2^x 0dt = \frac{6}{5} \left( \frac{1}{3}t^3 - \frac{1}{2}t^2 \right) \Big|_1^2 = \frac{6}{5} \left( \frac{1}{3}8 - \frac{1}{2}4 - \frac{1}{3} + \frac{1}{2} \right) = 1..$$

Получаем:

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x < 1, \\ \frac{1}{5}(2x^3 - 3x^2 + 1), & 1 \leq x \leq 2, \\ 1, & x > 2. \end{cases}$$

Вероятность попадания СВ  $X$  в интервал  $(0,5;1,5)$ :

$$P(0,5 < X < 1,5) = F(1,5) - F(0,5) = \frac{1}{5}(2 \cdot 1,5^3 - 3 \cdot 1,5^2 + 1) - 0 = \frac{1}{5} = 0,2.$$

**Задача 3.** НСВ  $X$  задана интегральной функцией:  $F(x)$ .

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x \leq -2, \\ \frac{1}{2} + \frac{1}{\pi} \arcsin \frac{x}{2}, & -2 < x \leq 2, \\ 1, & x > 2. \end{cases}$$

Найти вероятность того, что в результате  $N=3$  испытаний  $X$  примет значение в интервале  $(a,b)=(-1, 1)$ .

**Решение.** Вероятность того, что величина  $X$  примет значение, заключенное в интервале  $(a,b)$ , равна приращению функции распределения на этом интервале:

Переходите на сайт, смотрите больше примеров или закажите свою работу

[https://www.matburo.ru/sub\\_vuz.php?p=mireatv](https://www.matburo.ru/sub_vuz.php?p=mireatv)

©МатБюро. Решение задач по математике, экономике, программированию

$$P(a < X < b) = F(b) - F(a).$$

Подставляем:

$$\begin{aligned} P(-1 < X < 1) &= F(1) - F(-1) = \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{\pi} \arcsin \frac{1}{2}\right) - \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{\pi} \arcsin \frac{-1}{2}\right) = \\ &= \frac{1}{2} + \frac{1}{\pi} \arcsin \frac{1}{2} - \frac{1}{2} - \frac{1}{\pi} \arcsin \frac{-1}{2} = \frac{1}{\pi} \arcsin \frac{1}{2} + \frac{1}{\pi} \arcsin \frac{1}{2} = \frac{2}{\pi} \arcsin \frac{1}{2} = \frac{2}{\pi} \frac{\pi}{6} = \frac{1}{3}. \end{aligned}$$

Тогда вероятность того, что в результате 3 испытаний  $X$  все разы примет значение в интервале  $(-1, 1)$ , равна

$$P = \left(\frac{1}{3}\right)^3 = \frac{1}{27}.$$

**Задача 4.** Случайная величина  $X$  задана интегральной функцией  $F(x)$ .

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x \leq 2, \\ \frac{1}{2}x - 1, & 2 < x \leq 4, \\ 1, & x > 4. \end{cases}$$

Найти вероятность того, что в результате испытания  $X$  примет значение:

а) меньше 2, б) меньше 3, в) не меньше 3, г) не меньше 5.

**Решение.** Вероятность того, что величина  $X$  примет значение, заключенное в интервале  $(a, b)$ , равна приращению функции распределения на этом интервале:

Переходите на сайт, смотрите больше примеров или закажите свою работу

[https://www.matburo.ru/sub\\_vuz.php?p=mireatv](https://www.matburo.ru/sub_vuz.php?p=mireatv)

©МатБюро. Решение задач по математике, экономике, программированию

$$P(a < X < b) = F(b) - F(a).$$

а) меньше 2.

$$P(-\infty < X < 2) = F(2) - F(-\infty) = 0 - 0 = 0$$

б) меньше 3.

$$P(-\infty < X < 3) = F(3) - F(-\infty) = \frac{1}{2}3 - 1 - 0 = \frac{1}{2} = 0,5$$

в) не меньше 3.

$$P(X \geq 3) = 1 - P(-\infty < X < 3) = 1 - 0,5 = 0,5.$$

г) не меньше 5.

$$P(X \geq 5) = P(5 < X < \infty) = F(\infty) - F(5) = 1 - 1 = 0.$$

**Задача 5.** Дана интегральная функция НСВ X:

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x \leq 0, \\ \sin(2x), & 0 < x \leq \pi/4, \\ 1, & x > \pi/4. \end{cases}$$

Найти дифференциальную функцию и вероятность попадания СВ на интервал  $(a, b) = (\pi/16, \pi/8)$  для данной F(x).

Решение типовика выполнено на сайте [www.matburo.ru](http://www.matburo.ru)

Переходите на сайт, смотрите больше примеров или закажите свою работу

[https://www.matburo.ru/sub\\_vuz.php?p=mireatv](https://www.matburo.ru/sub_vuz.php?p=mireatv)

©МатБюро. Решение задач по математике, экономике, программированию

**Решение.** Найдем плотность вероятности  $f(x)$  по определению:

$$f(x) = F'(x) = \begin{cases} 0, & x \leq 0, \\ 2 \cos 2x, & 0 < x \leq \pi/4, \\ 0, & x > \pi/4. \end{cases}$$

Найдем вероятность попадания СВ на интервал  $(a, b) = (\pi/16, \pi/8)$ . . Вероятность того, что величина  $X$  примет значение, заключенное в интервале  $(a, b)$ , равна приращению функции распределения на этом интервале:  $P(a < X < b) = F(b) - F(a)$ .

Получаем:

$$P\left(\frac{\pi}{16} < X < \frac{\pi}{8}\right) = F\left(\frac{\pi}{8}\right) - F\left(\frac{\pi}{16}\right) = \sin \frac{\pi}{4} - \sin \frac{\pi}{8} = 0,324.$$

**Задача 6.** Найти  $M(x)$  числа лотерейных билетов, на которые выпадут выигрыши, если приобретено  $N=50$  билетов, причем вероятность выигрыша равна  $p=0,01$ .

**Решение.** Математическое ожидание для биномиального распределения равно:

$$M(X) = np = 50 \cdot 0,01 = 0,5.$$

Переходите на сайт, смотрите больше примеров или закажите свою работу

[https://www.matburo.ru/sub\\_vuz.php?p=mireatv](https://www.matburo.ru/sub_vuz.php?p=mireatv)

©МатБюро. Решение задач по математике, экономике, программированию

**Задача 7.** НСВ задана дифференциальной функцией:  $f(x) = \frac{1}{\pi\sqrt{c^2 - x^2}}$  в интервале  $(-c; c)$ , вне этого интервала  $f(x)=0$ . Найти вероятность попадания СВ  $X$  в интервал  $(a, b) = (-c/4, c/4)$  и функцию распределения  $F(x)$ .

**Решение.** Плотность распределения вероятностей случайной величины  $X$

$$f(x) = \begin{cases} 0, & \text{если } |x| \geq c, \\ \frac{1}{\pi\sqrt{c^2 - x^2}}, & \text{если } |x| < c. \end{cases}$$

Найдем функцию распределения  $F(x)$  по определению  $F(x) = \int_{-\infty}^x f(t)dt$ . Получаем:

Пусть  $x \leq -c$ , тогда  $f(x) = 0$ , тогда  $F(x) = \int_{-\infty}^x f(t)dt = \int_{-\infty}^x 0dt = 0$ .

Пусть  $-c < x \leq c$ , тогда  $f(x) = \frac{1}{\pi\sqrt{c^2 - x^2}}$ , тогда

$$\begin{aligned} F(x) &= \int_{-\infty}^x f(t)dt = \int_{-\infty}^{-c} 0dt + \int_{-c}^x \frac{1}{\pi\sqrt{c^2 - t^2}} dt = \frac{1}{\pi} \arcsin(t/c) \Big|_{-c}^x = \\ &= \frac{1}{\pi} \arcsin(x/c) - \frac{1}{\pi} \arcsin(-c/c) = \frac{1}{\pi} \arcsin\left(\frac{x}{c}\right) + \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

Пусть  $x > c$ , тогда  $f(x) = 0$ , тогда

$$F(x) = \int_{-\infty}^x f(t)dt = \int_{-\infty}^{-c} 0dt + \int_{-c}^c \frac{1}{\pi\sqrt{c^2 - t^2}} dt + \int_c^x 0dt = \frac{1}{\pi} \arcsin(t/c) \Big|_{-c}^c = 1.$$

Таким образом,



Переходите на сайт, смотрите больше примеров или закажите свою работу

[https://www.matburo.ru/sub\\_vuz.php?p=mireatv](https://www.matburo.ru/sub_vuz.php?p=mireatv)

©МатБюро. Решение задач по математике, экономике, программированию

$$F(x) = \begin{cases} 0, & \text{при } -\infty < x \leq c, \\ \frac{1}{\pi} \arcsin\left(\frac{x}{c}\right) + \frac{1}{2}, & \text{при } -c < x \leq c, \\ 1, & \text{при } c < x < +\infty. \end{cases}$$

Найдем вероятность попадания СВ X в интервал  $(a, b) = (-c/4, c/4)$ . Получаем:

$$\begin{aligned} P\{-c/4 < X < c/4\} &= F(c/4) - F(-c/4) = \\ &= \left(\frac{1}{\pi} \arcsin\left(\frac{c}{4c}\right) + \frac{1}{2}\right) - \left(\frac{1}{\pi} \arcsin\left(-\frac{c}{4c}\right) + \frac{1}{2}\right) = \\ &= \frac{1}{\pi} \arcsin\left(\frac{1}{4}\right) - \frac{1}{\pi} \arcsin\left(-\frac{1}{4}\right) = \frac{2}{\pi} \arcsin\left(\frac{1}{4}\right) \approx 0,161. \end{aligned}$$

**Задача 8.** НСВ X распределена нормально с математическим ожиданием  $m=20$ . Вероятность попадания СВ X в интервал  $(a; b)=(20, 40)$  равна  $p=0,3$ . Чему равна вероятность попадания НСВ X в интервал  $(c; d)=(0, 20)$ ?

**Решение.** Так как величина X распределена нормально, а интервалы имеют одинаковую длину и расположены симметрично относительно математического ожидания  $m = 20$ , то вероятность

$$P(0 < X < 20) = P(20 < X < 40) = 0,3.$$

**Задача 9.** Случайные величины X и Y заданы законами распределений. Определить математическое ожидание, дисперсию и среднее квадратическое отклонение случайных величин X и Y. Составить законы распределений случайных величин  $Z = X+Y$ ,  $V=XY$ . Построить многоугольник распределения вероятностей случайной величины Z. Найти математическое ожидание и дисперсию случайной величины  $W=2X-4Y$ .

Решение типовика выполнено на сайте [www.matburo.ru](http://www.matburo.ru)

Переходите на сайт, смотрите больше примеров или закажите свою работу

[https://www.matburo.ru/sub\\_vuz.php?p=mireatv](https://www.matburo.ru/sub_vuz.php?p=mireatv)

©МатБюро. Решение задач по математике, экономике, программированию

$X$	-5	-4	-3
$P$	$p$	0,1	0,4

$Y$	3	10	7
$P$	$q$	0,1	0,4

**Решение.** Найдем неизвестные вероятности из условия, что сумма вероятностей должна быть равна 1:

$$p = 1 - 0,1 - 0,4 = 0,5;$$

$$q = 1 - 0,1 - 0,4 = 0,5.$$

Определим математическое ожидание, дисперсию и среднее квадратическое отклонение случайных величин  $X$  и  $Y$ .

$$M(X) = \sum x_i \cdot p_i = -4,1$$

$$D(X) = \sum x_i^2 \cdot p_i - (M(X))^2 = 17,7 - (-4,1)^2 = 0,89.$$

$$\sigma(X) = \sqrt{D(X)} = 0,943$$

Расчеты в таблице:

Переходите на сайт, смотрите больше примеров или закажите свою работу

[https://www.matburo.ru/sub\\_vuz.php?p=mireatv](https://www.matburo.ru/sub_vuz.php?p=mireatv)

©МатБюро. Решение задач по математике, экономике, программированию

$x_i$	-5	-4	-3	<b>Сумма</b>
$p_i$	0,5	0,1	0,4	<b>1</b>
$x_i p_i$	-2,5	-0,4	-1,2	<b>-4,1</b>
$x_i^2 p_i$	12,5	1,6	3,6	<b>17,7</b>

$$M(Y) = \sum y_i \cdot p_i = 5,3$$

$$D(Y) = \sum y_i^2 \cdot p_i - (M(Y))^2 = 34,1 - 5,3^2 = 6,01.$$

$$\sigma(Y) = \sqrt{D(Y)} = 2,452$$

Расчеты в таблице:

$y_i$	3	10	7	<b>Сумма</b>
$p_i$	0,5	0,1	0,4	<b>1</b>
$y_i p_i$	1,5	1	2,8	<b>5,3</b>
$y_i^2 p_i$	4,5	10	19,6	<b>34,1</b>

Составим законы распределений случайных величин  $Z = X+Y$ ,  $V=XY$ .

Составим вспомогательные таблицы:

Решение типовика выполнено на сайте [www.matburo.ru](http://www.matburo.ru)

Переходите на сайт, смотрите больше примеров или закажите свою работу

[https://www.matburo.ru/sub\\_vuz.php?p=mireatv](https://www.matburo.ru/sub_vuz.php?p=mireatv)

©МатБюро. Решение задач по математике, экономике, программированию

1) Сумма значений

$x + y$	3	10	7
-5	-2	5	2
-4	-1	6	3
-3	0	7	4

2) произведение значений

$x \cdot y$	3	10	7
-5	-15	-50	-35
-4	-12	-40	-28
-3	-9	-30	-21

3) вероятности

$P_x \cdot P_y$	0,5	0,1	0,4
0,5	0,25	0,05	0,2
0,1	0,05	0,01	0,04
0,4	0,2	0,04	0,16

Переходите на сайт, смотрите больше примеров или закажите свою работу

[https://www.matburo.ru/sub\\_vuz.php?p=mireatv](https://www.matburo.ru/sub_vuz.php?p=mireatv)

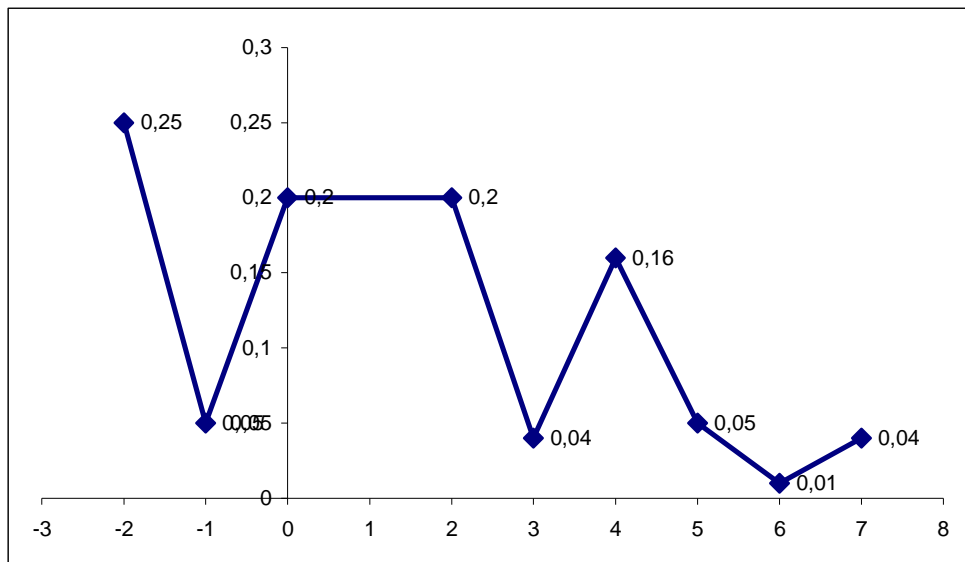
©МатБюро. Решение задач по математике, экономике, программированию

По данным таблицам выписываем законы распределений случайных величин  $Z = X + Y$  и  $V = XY$ .

$Z$	-2	-1	0	2	3	4	5	6	7
$P$	0,25	0,05	0,2	0,2	0,04	0,16	0,05	0,01	0,04

$V$	-50	-40	-35	-30	-28	-21	-15	-12	-9
$P$	0,05	0,01	0,2	0,04	0,04	0,16	0,25	0,05	0,2

Построим многоугольник распределения вероятностей случайной величины  $Z$ .



Найдем математическое ожидание и дисперсию случайной величины  $W=2X-4Y$ .

Решение типовика выполнено на сайте [www.matburo.ru](http://www.matburo.ru)

Переходите на сайт, смотрите больше примеров или закажите свою работу

[https://www.matburo.ru/sub\\_vuz.php?p=mireatv](https://www.matburo.ru/sub_vuz.php?p=mireatv)

©МатБюро. Решение задач по математике, экономике, программированию

$$M(W) = M(2X - 4Y) = 2M(X) - 4M(Y) = 2 \cdot (-4,1) - 4 \cdot 5,3 = -29,4.$$

$$D(W) = D(2X - 4Y) = 2^2 D(X) + (-4)^2 D(Y) = 4 \cdot 0,89 + 16 \cdot 6,01 = 99,72.$$

**Задача 10.** Непрерывная случайная величина задана интегральной функцией (функцией распределения)  $F(x)$ .

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x \leq 2, \\ (x-1)^2, & 2 < x \leq 3, \\ 1, & x > 3. \end{cases}$$

Найти:

- а) вероятность попадания случайной величины  $X$  в интервал  $(a,b)=(2,5, 3)$ ;
- б) дифференциальную функцию (функцию плотности вероятностей)  $f(x)$ ;
- в) математическое ожидание, дисперсию и среднее квадратическое отклонение случайной величины  $X$ ;
- г) построить графики функций  $F(x)$  и  $f(x)$ .

**Решение.**

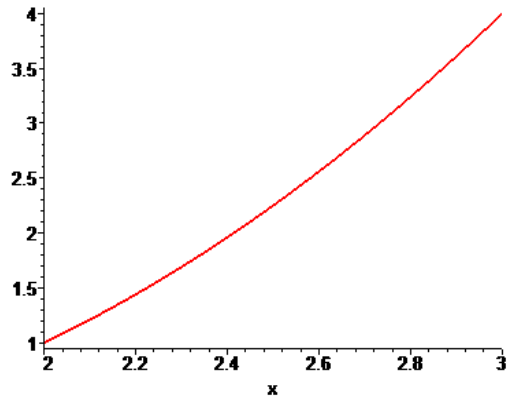
Построим график функции распределения:

Решение типовика выполнено на сайте [www.matburo.ru](http://www.matburo.ru)

Переходите на сайт, смотрите больше примеров или закажите свою работу

[https://www.matburo.ru/sub\\_vuz.php?p=mireatv](https://www.matburo.ru/sub_vuz.php?p=mireatv)

©МатБюро. Решение задач по математике, экономике, программированию



Она принимает значения от 1 до 4 на интервале  $(2,3)$ , тогда как по определению должна принимать значения от 0 до 1. Функция задана некорректно, решение невозможно.