

Решение типовика выполнено на сайте www.matburo.ru

Переходите на сайт, смотрите больше примеров или закажите свою работу

https://www.matburo.ru/sub_vuz.php?p=mireatv

©МатБюро. Решение задач по математике, экономике, программированию

МИРЭА. Типовой расчет по теории вероятностей с решением

Вариант 1

Часть 2. Случайные величины

Задача 2.1. Фекла решила удивить своего бойфренда роскошным ужином и купила для этого в супермаркете пакет с картофелем. Картофель упаковывают по 14 штук в каждый пакет, причем 2 из них с темными пятнами внутри. Фекла чистит 5 картофелин на ужин. Найдите ряд распределения случайной величины ξ числа испорченных картофелин среди очищенных, постройте график функции распределения, найдите $M\xi, D\xi$.

Решение. Пусть ξ - дискретная случайная величина, равная количеству испорченных картофелин среди 5 выбранных. Она может принимать целые значения от 0 до 4. Вероятности этих значений можно найти по формуле гипергеометрической вероятности:

$$P(\xi = k) = \frac{C_2^k \cdot C_{12}^{5-k}}{C_{14}^5}, \quad k = 0, 1, 2$$
 - вероятность того, что будет выбрано k испорченных картофелин (из 2) и еще $5 - k$ обычных (из $14 - 2 = 12$).

Вычисляем вероятности по этой формуле.

$$P(\xi = 0) = \frac{C_2^0 \cdot C_{12}^5}{C_{14}^5} = \frac{36}{91},$$

$$P(\xi = 1) = \frac{C_2^1 \cdot C_{12}^4}{C_{14}^5} = \frac{45}{91},$$

$$P(\xi = 2) = \frac{C_2^2 \cdot C_{12}^3}{C_{14}^5} = \frac{10}{91}.$$

Решение типовика выполнено на сайте www.matburo.ru

Переходите на сайт, смотрите больше примеров или закажите свою работу

https://www.matburo.ru/sub_vuz.php?p=mireatv

©МатБюро. Решение задач по математике, экономике, программированию

Занесем в таблицу, получим закон распределения:

x_i	0	1	2
p_i	36/91	45/91	10/91

Сумма вероятностей равна 1, расчеты верные.

Найдем функцию распределения по определению $F(x) = P(\xi < x)$, то есть

при $x \leq 0$, $F(x) = 0$,

при $0 < x \leq 1$, $F(x) = 0 + 36/91 = 36/91$,

при $1 < x \leq 2$, $F(x) = 36/91 + 45/91 = 81/91$,

при $x > 2$, $F(x) = 81/91 + 10/91 = 1$.

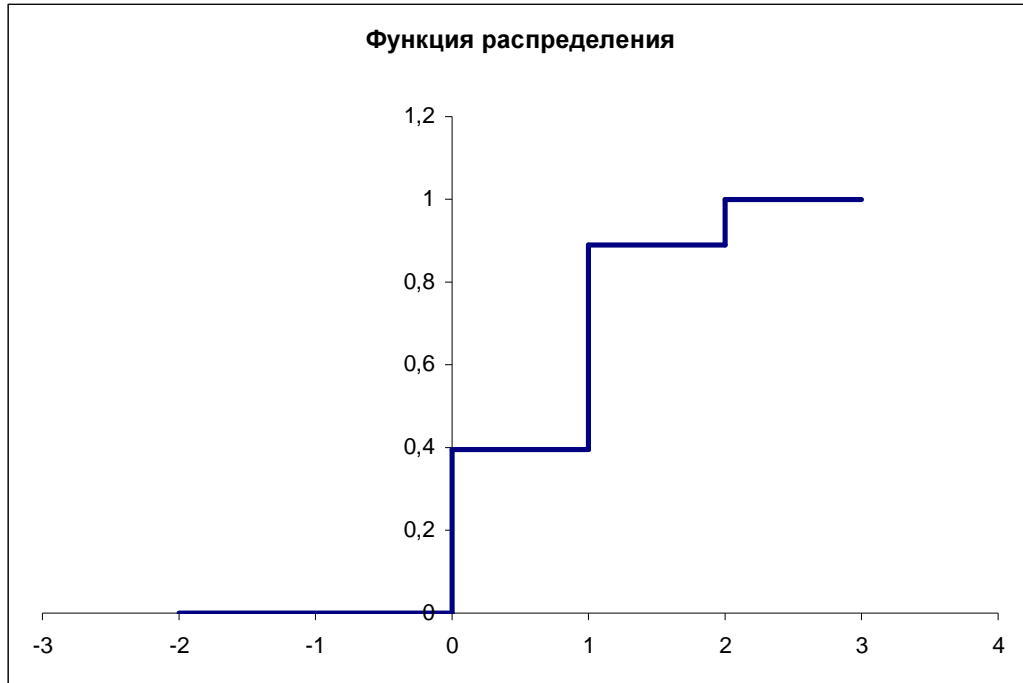
Построим график:

Решение типовика выполнено на сайте www.matburo.ru

Переходите на сайт, смотрите больше примеров или закажите свою работу

https://www.matburo.ru/sub_vuz.php?p=mireatv

©МатБюро. Решение задач по математике, экономике, программированию



Математическое ожидание

$$M\xi = \sum x_i p_i = 0 \cdot \frac{36}{91} + 1 \cdot \frac{45}{91} + 2 \cdot \frac{10}{91} = \frac{5}{7}.$$

Дисперсия:

$$D\xi = \sum x_i^2 p_i - (M\xi)^2 = 0 \cdot \frac{36}{91} + 1 \cdot \frac{45}{91} + 4 \cdot \frac{10}{91} - \left(\frac{5}{7}\right)^2 = \frac{270}{637}.$$

Задача 2.2. Устройство содержит некоторое количество одинаково надежных элементов, которые могут отказывать независимо друг от друга с одинаковой вероятностью. ξ — случайная величина — число отказавших элементов.

Переходите на сайт, смотрите больше примеров или закажите свою работу

https://www.matburo.ru/sub_vuz.php?p=mireatv

©МатБюро. Решение задач по математике, экономике, программированию

А) Число элементов $N1 = 8$, вероятность отказа каждого элемента - $p1 = 0,35$. Составить ряд распределения случайной величины ξ (в общем виде). Найти математическое ожидание ξ , дисперсию ξ . Какова вероятность того, что откажет более 2-х элементов?

Решение. Случайная величина ξ – число отказавших элементов распределена по биномиальному закону с параметрами $n = 8, p = 0,35$. ξ может принимать значения $\{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$, причем соответствующие вероятности можно вычислить по формуле Бернулли:

$$P(\xi = k) = P_n(k) = C_n^k p^k (1-p)^{n-k} = C_8^k \cdot 0,35^k \cdot 0,65^{8-k}.$$

Так как ξ распределено по биномиальному закону, воспользуемся соответствующими формулами для вычисления характеристик случайной величины ξ .

Математическое ожидание $M\xi = n \cdot p = 8 \cdot 0,35 = 2,8$.

Дисперсия $D\xi = n \cdot p \cdot (1-p) = 8 \cdot 0,35 \cdot 0,65 = 1,82$

Найдем вероятность того, что откажет более 2-х элементов:

$$\begin{aligned} P(\xi > 2) &= 1 - P(\xi \leq 2) = 1 - P(\xi = 0) - P(\xi = 1) - P(\xi = 2) = \\ &= 1 - C_8^0 \cdot 0,35^0 \cdot 0,65^{8-0} - C_8^1 \cdot 0,35^1 \cdot 0,65^{8-1} - C_8^2 \cdot 0,35^2 \cdot 0,65^{8-2} = \\ &= 1 - 0,65^8 - 8 \cdot 0,35 \cdot 0,65^7 - \frac{7 \cdot 8}{1 \cdot 2} \cdot 0,35^2 \cdot 0,65^6 \approx 0,572. \end{aligned}$$

Б) Число элементов $N2 = 600$, вероятность отказа $p2 = 0,001$. Найти математическое ожидание ξ , дисперсию ξ . Какова вероятность того, что откажет хотя бы один элемент?

Решение. Случайная величина ξ – число отказавших элементов распределена по биномиальному закону с параметрами $n = 600, p = 0,001$. ξ может принимать целые значения от 0 до 600,

Переходите на сайт, смотрите больше примеров или закажите свою работу

https://www.matburo.ru/sub_vuz.php?p=mireatv

©МатБюро. Решение задач по математике, экономике, программированию

причем соответствующие вероятности можно вычислить по точной формуле Бернулли:
$$P(\xi = k) = P_n(k) = C_n^k p^k (1-p)^{n-k} = C_{600}^k \cdot 0,001^k \cdot 0,999^{600-k}.$$

Но, так как n велико, а p мало, можно использовать для вычислений приближенную формулу

Пуассона: $P_n(k) = \frac{(np)^k}{k!} e^{-np}$, где $np = 600 \cdot 0,001 = 0,6$, откуда получаем искомую формулу

$$P(\xi = k) = \frac{0,6^k}{k!} e^{-0,6}.$$

Так как ξ распределено по биномиальному закону, воспользуемся соответствующими формулами для вычисления характеристик случайной величины ξ .

Математическое ожидание $M\xi = n \cdot p = 600 \cdot 0,001 = 0,6$.

Дисперсия $D\xi = n \cdot p \cdot (1-p) = 600 \cdot 0,001 \cdot 0,999 = 0,5994$

Найдем вероятность того, что откажет хотя бы один элемент:

$$P(\xi \geq 1) = 1 - P(\xi < 1) = 1 - P(\xi = 0) = 1 - \frac{0,6^0}{0!} e^{-0,6} = 1 - e^{-0,6} \approx 0,451.$$

Задача 2.3. В урне находятся белые и черные шары. Из урны извлекается шар, фиксируется его цвет и шар возвращается в урну. Шар извлекается до первого появления события A (число извлечений неограниченно).

Событие A - появление черного шара. В урне 4 белых и 6 черных шаров.

Построить ряд распределения дискретной случайной величины ξ - числа извлеченных шаров. Найти математическое ожидание и дисперсию ξ . Найти вероятность того, что извлекалось более четырех шаров.

Переходите на сайт, смотрите больше примеров или закажите свою работу

https://www.matburo.ru/sub_vuz.php?p=mireatv

©МатБюро. Решение задач по математике, экономике, программированию

Решение. Пусть ξ - дискретная случайная величина, равная числу извлеченных шаров. Так как число шаров неограниченно и шар каждый раз возвращается в урну, ξ может принимать целые значения 1, 2, 3, ...

Величина ξ распределена по геометрическому закону распределения, вероятности $P(\xi = k) = p^{k-1} \cdot q = 0,4^{k-1} \cdot 0,6$ (первые $k-1$ извлечений был вынут белый шар с вероятностью $\frac{4}{6+4} = 0,4$ в каждом извлечении, в последнем k извлечении был вынут черный шар с вероятностью $\frac{6}{6+4} = 0,6$).

Получаем ряд распределения:

x_i	1	2	3	...	k	...
p_i	0,6	0,24	0,096	...	$0,4^{k-1} \cdot 0,6$...

Тогда математическое ожидание

$$\begin{aligned}
 M\xi &= \sum x_k p_k = \sum_{k=1}^{\infty} p^{k-1} q \cdot k = q \sum_{k=1}^{\infty} k p^{k-1} = q \sum_{k=1}^{\infty} (p^k)' = \\
 &= q \left(\sum_{k=1}^{\infty} p^k \right)' = q \left(\frac{p}{1-p} \right)' = q \frac{1(1-p) - p(-1)}{(1-p)^2} = q \frac{1}{q^2} = \frac{1}{q}.
 \end{aligned}$$

Для нашего случая $M\xi = \frac{1}{0,6} = \frac{10}{6} = 1,667$.

Переходите на сайт, смотрите больше примеров или закажите свою работу

https://www.matburo.ru/sub_vuz.php?p=mireatv

©МатБюро. Решение задач по математике, экономике, программированию

Аналогично найдем $M(\xi^2) = \sum (x_k)^2 p_k = \sum_{k=0}^{\infty} p^{k-1} \cdot q \cdot k^2 = \frac{(p+1)}{q^2}$.

Тогда дисперсия

$$D\xi = M(\xi^2) - (M\xi)^2 = \frac{(p+1)}{q^2} - \frac{1}{q^2} = \frac{p}{q^2} \text{ или } D\xi = \frac{0,4}{0,6^2} = 1,111.$$

Найти вероятность того, что извлекалось более четырех шаров:

$$\begin{aligned} P(\xi > 4) &= 1 - P(\xi \leq 4) = 1 - P(\xi = 1) - P(\xi = 2) - P(\xi = 3) - P(\xi = 4) = \\ &= 1 - 0,6 - 0,24 - 0,096 - 0,4^3 \cdot 0,6 = 0,0256. \end{aligned}$$

Задача 2.4. Дана функция распределения непрерывной случайной величины $F(x)$. Найти плотность распределения $f(x)$, параметр A , вероятность попадания непрерывной случайной величины в интервал (α, β) , математическое ожидание и дисперсию непрерывной случайной величины. Построить графики $f(x)$ и $F(x)$.

$$11. \quad F(x) = \begin{cases} 0, & x \leq 0 \\ A(6x - x^2), & x \in (0; 3] \\ 1, & x > 3 \end{cases} \quad \alpha = 0, \quad \beta = 1$$

Решение.

Переходите на сайт, смотрите больше примеров или закажите свою работу

https://www.matburo.ru/sub_vuz.php?p=mireatv

©МатБюро. Решение задач по математике, экономике, программированию

Найдем параметр А из условия $F(3) = A(18 - 9) = 9A = 1$, $A = \frac{1}{9}$.

Получаем:

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x \leq 0; \\ \frac{1}{9}(6x - x^2), & 0 < x \leq 3; \\ 1, & x > 3. \end{cases}$$

Найдем плотность вероятности по определению:

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x \leq 0; \\ \frac{1}{9}(6 - 2x), & 0 < x \leq 3; \\ 0, & x > 3. \end{cases}$$

Найдем вероятность:

$$P(0 < X < 1) = F(1) - F(0) = \frac{1}{9}(6 - 1) - 0 = \frac{5}{9} \approx 0,556.$$

Математическое ожидание:

$$\begin{aligned} M(X) &= \int_{-\infty}^{\infty} f(x)x dx = \frac{1}{9} \int_0^3 (6 - 2x)x dx = \frac{1}{9} \int_0^3 (6x - 2x^2) dx = \frac{1}{9} \left(3x^2 - \frac{2}{3}x^3 \right) \Big|_0^3 = \\ &= \frac{1}{9} \left[3 \cdot 3^2 - \frac{2}{3}3^3 \right] = 1. \end{aligned}$$

Дисперсия:

Решение типовика выполнено на сайте www.matburo.ru

Переходите на сайт, смотрите больше примеров или закажите свою работу

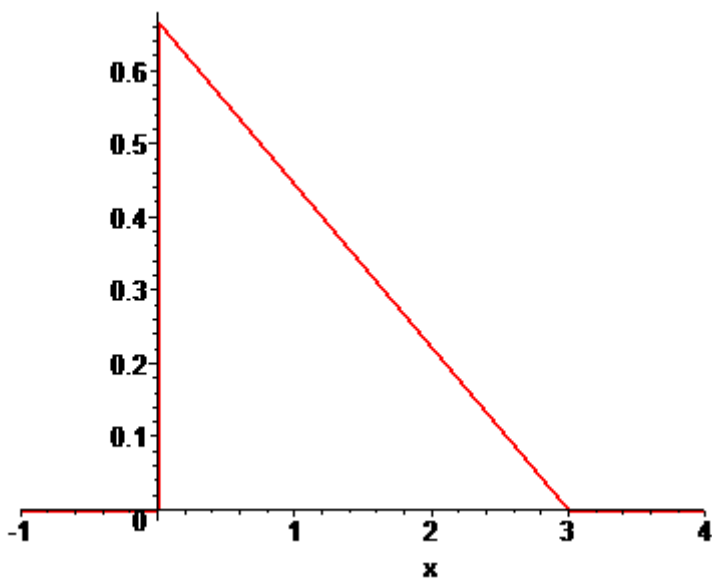
https://www.matburo.ru/sub_vuz.php?p=mireatv

©МатБюро. Решение задач по математике, экономике, программированию

$$\begin{aligned} D(X) &= \int_{-\infty}^{\infty} f(x)x^2 dx - (M(X))^2 = \frac{1}{9} \int_0^3 (6-2x)x^2 dx - 1 = \frac{1}{9} \int_0^3 (6x^2 - 2x^3) dx - 1 = \\ &= \frac{1}{9} \left(2x^3 - \frac{1}{2}x^4 \right) \Big|_0^3 - 1 = \frac{1}{9} \left[2 \cdot 3^3 - \frac{1}{2}3^4 \right] - 1 = \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

Строим графики.

Плотность распределения:



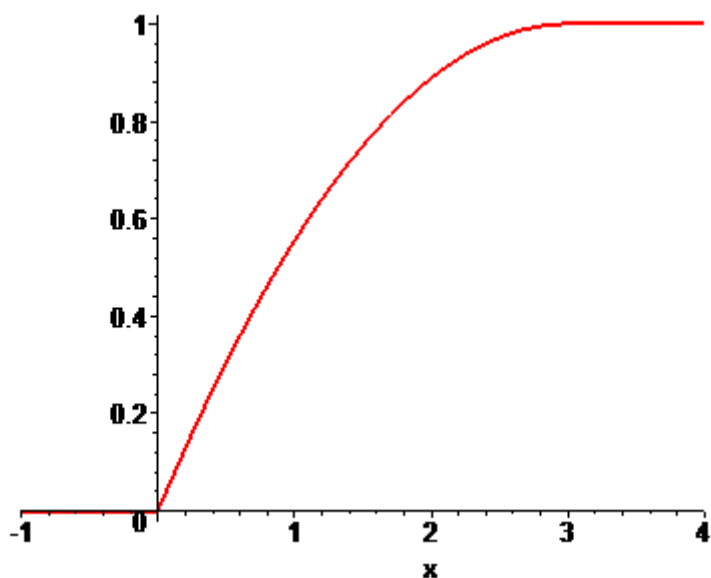
Функция распределения:

Решение типовика выполнено на сайте www.matburo.ru

Переходите на сайт, смотрите больше примеров или закажите свою работу

https://www.matburo.ru/sub_vuz.php?p=mireatv

©МатБюро. Решение задач по математике, экономике, программированию



Задача 2.5. Непрерывная случайная величина распределена равномерно на отрезке $[1;A]$. Математическое ожидание равно 5,5.

Найти параметр распределения A , функцию распределения, плотность распределения, построить графики функции распределения и плотности распределения случайной величины.

Найти дисперсию случайной величины и вероятность попадания в интервал $(3; 17)$.

Решение. Найдем параметр распределения A из условия

$$MX = \frac{A+1}{2} = 5,5,$$

$$A+1=11,$$

$$A=10.$$

Переходите на сайт, смотрите больше примеров или закажите свою работу

https://www.matburo.ru/sub_vuz.php?p=mireatv

©МатБюро. Решение задач по математике, экономике, программированию

Получаем, что X распределена равномерно на интервале $(a, b) = (1, 10)$.

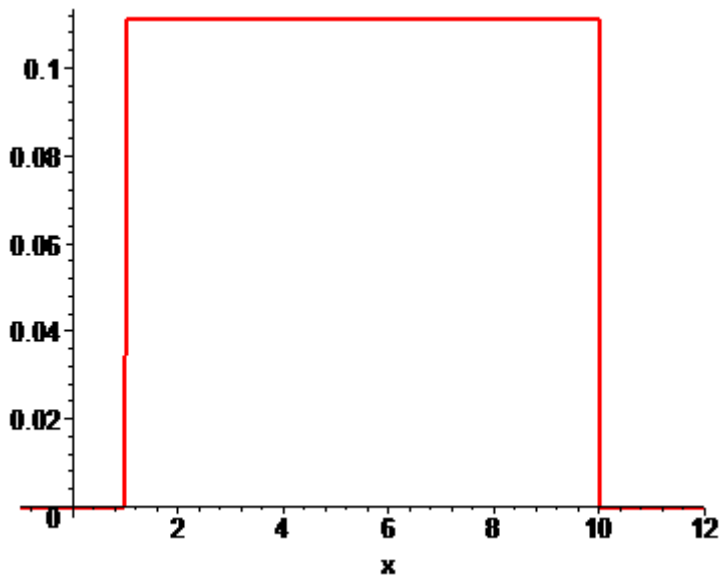
Плотность распределения:

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x < a, \\ \frac{1}{b-a}, & a \leq x \leq b, \\ 0, & x > b. \end{cases} \Rightarrow f(x) = \begin{cases} 0, & x < 1, \\ \frac{1}{9}, & 1 \leq x \leq 10, \\ 0, & x > 10. \end{cases}$$

Функция распределения:

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x < a, \\ \frac{x-a}{b-a}, & a \leq x \leq b, \\ 1, & x > b. \end{cases} \Rightarrow F(x) = \begin{cases} 0, & x < 1, \\ \frac{x-1}{9}, & 1 \leq x \leq 10, \\ 1, & x > 10. \end{cases}$$

Графики функций:

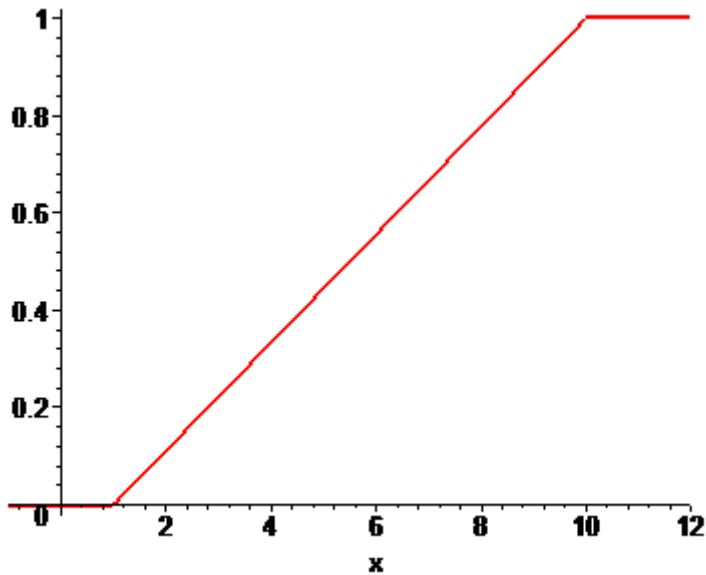


Решение типовика выполнено на сайте www.matburo.ru

Переходите на сайт, смотрите больше примеров или закажите свою работу

https://www.matburo.ru/sub_vuz.php?p=mireatv

©МатБюро. Решение задач по математике, экономике, программированию



$$\text{Дисперсия } DX = \frac{(b-a)^2}{12} = \frac{(10-1)^2}{12} = \frac{81}{12} = \frac{27}{4}$$

Найдем вероятность попадания в интервал $(\alpha, \beta) = (3; 17)$.

$$P(3 < X < 17) = F(17) - F(3) = 1 - \frac{3-1}{9} = \frac{7}{9} \approx 0,778.$$

Задача 2.6. Непрерывная случайная величина ξ распределена по показательному закону с параметром $\lambda=11$. Найти плотность распределения случайной величины ξ , функцию распределения, построить графики этих функций. Найти математическое ожидание, дисперсию, среднее квадратическое отклонение случайной величины ξ и вероятность того, что ξ принимает значения, меньшие своего математического ожидания.

Решение типовика выполнено на сайте www.matburo.ru

Переходите на сайт, смотрите больше примеров или закажите свою работу

https://www.matburo.ru/sub_vuz.php?p=mireatv

©МатБюро. Решение задач по математике, экономике, программированию

Решение. По условию непрерывная случайная величина ξ распределена по показательному закону с параметром $\lambda = 11$.

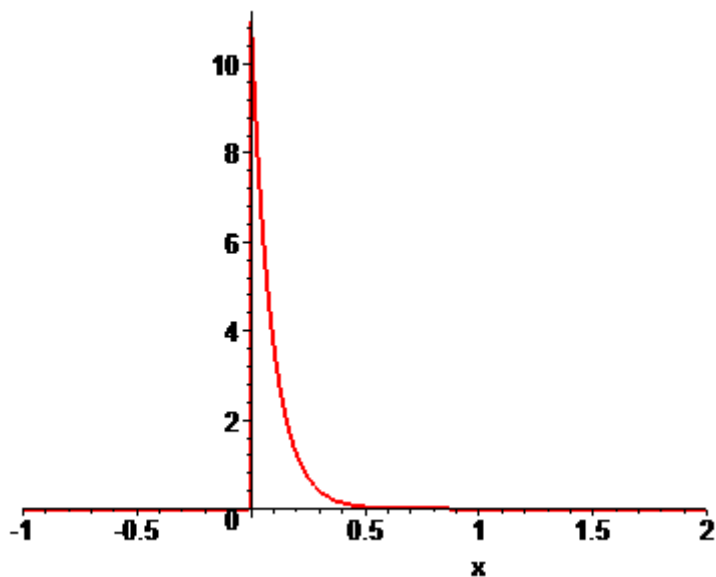
Тогда плотность вероятности имеет вид:

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x < 0, \\ 11e^{-11x}, & x \geq 0. \end{cases}$$

Функция распределения имеет вид:

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x < 0, \\ 1 - e^{-11x}, & x \geq 0. \end{cases}$$

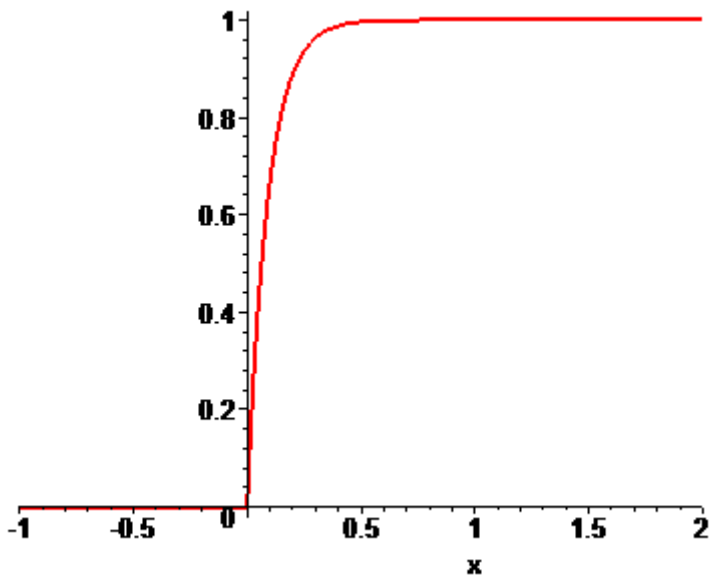
Построим графики функций.



Переходите на сайт, смотрите больше примеров или закажите свою работу

https://www.matburo.ru/sub_vuz.php?p=mireatv

©МатБюро. Решение задач по математике, экономике, программированию



Найдем математическое ожидание, дисперсию, среднее квадратическое отклонение случайной величины ξ .

$$a = M(\xi) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)x dx = \int_0^{\infty} 11xe^{-11x} dx = \left[-xe^{-11x} - \frac{1}{11}e^{-11x} \right]_0^{\infty} = \frac{1}{11}.$$

Дисперсия

$$D(\xi) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)x^2 dx - (M(\xi))^2 = \int_0^{\infty} 11e^{-2x}x^2 dx - \left(\frac{1}{11}\right)^2 = \left[-x^2e^{-2x} - \frac{2x}{11}e^{-11x} - \frac{2}{11^2}e^{-11x} \right]_0^{\infty} - \frac{1}{121} = \frac{2}{121} - \frac{1}{121} = \frac{1}{121}.$$

Среднее квадратическое отклонение случайной величины ξ : $\sigma(\xi) = \sqrt{D(\xi)} = \sqrt{\frac{1}{121}} = \frac{1}{11}$.

Переходите на сайт, смотрите больше примеров или закажите свою работу

https://www.matburo.ru/sub_vuz.php?p=mireatv

©МатБюро. Решение задач по математике, экономике, программированию

Найдем вероятность того, что ξ принимает значения, меньшие своего математического ожидания.

$$P(0 < \xi < 1/11) = F(1/11) - F(0) = (1 - e^{-11/11}) - (1 - e^0) = 1 - e^{-1} = 0,632.$$

Задача 2.7. Автомат по нарезанию гвоздей длиной 80 мм в нормальном режиме имеет случайную ошибку, распределенную по нормальному закону. Систематическая ошибка отсутствует, средняя квадратическая ошибка равна 0,5 мм. В каком интервале с вероятностью 0,999 будет находиться длина гвоздя?

Решение. Будем использовать формулу: $P(|X - a| < \delta) = 2\Phi\left(\frac{\delta}{\sigma}\right)$, где $\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^x e^{-z^2/2} dz$ -

нормированная функция Лапласа (значения берутся из таблицы). По условию также известно, что $\sigma = 0,5$, $P = 0,999$, $a = 0$, отклонение от номинала $\delta = ?$.

Найдем отклонение δ :

$$P(|X - 0| < \delta) = 2\Phi\left(\frac{\delta}{0,5}\right) = 0,999,$$

$$\Phi\left(\frac{\delta}{0,5}\right) = 0,4995,$$

$$\frac{\delta}{0,5} = 3,291,$$

$$\delta = 1,6455.$$

Тогда с вероятностью 0,999 длина гвоздя будет находиться в интервале от $(80 - 1,6455) = 78,3545$ мм до $(80 + 1,6455) = 81,6455$ мм.

Переходите на сайт, смотрите больше примеров или закажите свою работу

https://www.matburo.ru/sub_vuz.php?p=mireatv

©МатБюро. Решение задач по математике, экономике, программированию

Ответ: от 78,3545 до 81,6455 мм.

Задача 2.8. Устройство состоит из 80 элементов с одинаковой надежностью 0,8 (надежность элемента – вероятность его работы за время t). Элементы выходят из строя независимо друг от друга. Найти вероятность того, что:

- 1) за время t выйдет из строя от 10 до 20 элементов;
- 2) относительная частота выхода из строя элементов будет отклоняться от вероятности этого события менее чем на 0,1 (по абсолютной величине).

Решение. Имеем схему Бернулли с параметрами $n = 80$ (количество элементов), $p = 0,2$ (вероятность выхода элемента из строя), $q = 1 - p = 0,8$.

Найдем вероятность того, что за время t выйдет из строя от 10 до 20 элементов. Используем интегральную теорему Лапласа:

$$P_n(m_1, m_2) \approx \Phi\left(\frac{m_2 - np}{\sqrt{npq}}\right) - \Phi\left(\frac{m_1 - np}{\sqrt{npq}}\right), \text{ где } m_1 = 10, m_2 = 20, \Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^x e^{-z^2/2} dz -$$

функция Лапласа (значения берутся из таблиц). Подставляем:

$$\begin{aligned} P_{80}(10, 20) &\approx \Phi\left(\frac{20 - 80 \cdot 0,2}{\sqrt{80 \cdot 0,2 \cdot 0,8}}\right) - \Phi\left(\frac{10 - 80 \cdot 0,2}{\sqrt{80 \cdot 0,2 \cdot 0,8}}\right) = \\ &= \Phi(1,12) - \Phi(-1,68) = \Phi(1,12) + \Phi(1,68) = 0,3682 + 0,4532 = 0,8215. \end{aligned}$$

Найдем вероятность того, что относительная частота выхода из строя элементов будет отклоняться от вероятности этого события менее чем на 0,1 (по абсолютной величине).

Используем формулу:
$$P\left(\left|\frac{m}{n} - p\right| \leq \varepsilon\right) \approx 2\Phi\left(\varepsilon \sqrt{\frac{n}{pq}}\right).$$

Получаем:

Решение типовика выполнено на сайте www.matburo.ru

Переходите на сайт, смотрите больше примеров или закажите свою работу

https://www.matburo.ru/sub_vuz.php?p=mireatv

©МатБюро. Решение задач по математике, экономике, программированию

$$P\left(\left|\frac{m}{n} - 0,2\right| \leq 0,1\right) \approx 2\Phi\left(0,1\sqrt{\frac{80}{0,2 \cdot 0,8}}\right) = 2\Phi(2,236) = 2 \cdot 0,487 = 0,975.$$

Ответ: 0,8215; 0,975.