

Переходите на сайт, смотрите больше примеров или закажите свою работу

https://www.matburo.ru/sub_vuz.php?p=mireama

©МатБюро. Решение задач по математике, экономике, программированию

МИРЭА. Типовой расчет по математическому анализу

Контрольные задания по теме Ряды

Задание 1.

Найти сумму числового ряда

$$1) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(4n+1)(4n+5)} \quad 2) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n + (-1)^n}{5^n} \quad 3) \sum_{n=1}^{\infty} (2n^2 - n) \left(\frac{2}{3}\right)^n$$

Решение

1)

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(4n+1)(4n+5)} &= \frac{1}{4} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4}{(4n+1)(4n+5)} = \frac{1}{4} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4n+5 - (4n+1)}{(4n+1)(4n+5)} = \frac{1}{4} \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{4n+1} - \frac{1}{4n+5} \right) = \\ &= \frac{1}{4} \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{4n+1} - \frac{1}{4(n+1)+1} \right) = \frac{1}{4} \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{4*1+1} - \frac{1}{4*2+1} + \frac{1}{4*2+1} - \frac{1}{4*3+1} + \dots \right) = \frac{1}{4} \frac{1}{4*1+1} = \frac{1}{20} \end{aligned}$$

2)

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n + (-1)^n}{5^n} = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{3}{5}\right)^n + \sum_{n=1}^{\infty} \left(-\frac{1}{5}\right)^n$$

Получили две суммы геометрической прогрессии со знаменателем по модулю меньшим 1, тогда

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n + (-1)^n}{5^n} = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{3}{5}\right)^n + \sum_{n=1}^{\infty} \left(-\frac{1}{5}\right)^n = \frac{\frac{3}{5}}{1 - \frac{3}{5}} + \frac{-\frac{1}{5}}{1 + \frac{1}{5}} = \frac{\frac{3}{5}}{\frac{2}{5}} - \frac{\frac{1}{5}}{\frac{6}{5}} = \frac{3}{2} - \frac{1}{6} = \frac{4}{3}$$

Переходите на сайт, смотрите больше примеров или закажите свою работу

https://www.matburo.ru/sub_vuz.php?p=mireama

©МатБюро. Решение задач по математике, экономике, программированию

3)

Рассмотрим функцию $f(x) = (2n^2 - n)x^n$, где $|x| < 1$, тогда в круге сходимости ряд можно интегрировать и дифференцировать, получаем

$$\begin{aligned} f(x) &= (2n^2 - n)x^n = (2n^2 + 2n - 3n)x^n = (2n^2 + 2n)x^n - 3nx^n = 2n(n+1)x^n - 3nx^n = \\ &= 2x^2(n(n+1)x^{n-2}) - 3x(nx^{n-1}) = x^2(x^n)'' - 3x(x^n)' \end{aligned}$$

Тогда,

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{\infty} f(x) &= \sum_{n=1}^{\infty} x^2(x^n)'' - 3x(x^n)' = x^2 \sum_{n=1}^{\infty} (x^n)'' - 3x \sum_{n=1}^{\infty} (x^n)' = x^2 \left(\sum_{n=1}^{\infty} x^n \right)'' - 3x \left(\sum_{n=1}^{\infty} x^n \right)' = \\ &= x^2 \left(\frac{x}{1-x} \right)'' - 3x \left(\frac{x}{1-x} \right)' = x^2 \left(-\frac{x-1+1}{x-1} \right)'' - 3x \left(-\frac{x-1+1}{x-1} \right)' = x^2 \left(-1 + \frac{1}{x-1} \right)'' - 3x \left(-1 + \frac{1}{x-1} \right)' = \\ &= x^2 \left(-\frac{1}{(x-1)^2} \right)' - 3x \left(-\frac{1}{(x-1)^2} \right) = x^2 \left(\frac{2}{(x-1)^3} \right) + \frac{3x}{(x-1)^2} = \frac{2x^2 + 3x(x-1)}{(x-1)^3} = \frac{5x^2 - 3x}{(x-1)^3} \end{aligned}$$

Значит,

$$\sum_{n=1}^{\infty} (2n^2 - n) \left(\frac{2}{3} \right)^n = \frac{5 \left(\frac{2}{3} \right)^2 - 3 \frac{2}{3}}{\left(\frac{2}{3} - 1 \right)^3} = 54$$

Задание 2. Исследовать ряд на сходимость

$$1) \sum_{n=1}^{\infty} (n^2 - 3n) \operatorname{tg}^2 \frac{\pi}{n^4} \quad 2) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n-3}{n^2 + 3^n} \quad 3) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(3n-1)n!}{(2n+1)!!} \left(\frac{5}{3} \right)^n$$

Переходите на сайт, смотрите больше примеров или закажите свою работу

https://www.matburo.ru/sub_vuz.php?p=mireama

©МатБюро. Решение задач по математике, экономике, программированию

$$4) \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n^2+1}{n^2+4} \right)^{-n^3} \left(\frac{5}{2} \right)^n$$

Решение.

1)

Так как $\operatorname{tg} x \sim x, x \rightarrow 0$, тогда при $n \rightarrow \infty$ получаем, что $\operatorname{tg}^2 \frac{\pi}{n^4} \sim \left(\frac{\pi}{n^4} \right)^2$, тогда ряды

$\sum_{n=1}^{\infty} (n^2 - 3n) \operatorname{tg}^2 \frac{\pi}{n^4}$ и $\sum_{n=1}^{\infty} (n^2 - 3n) \left(\frac{\pi}{n^4} \right)^2$ сходятся и расходятся одновременно.

$$\sum_{n=1}^{\infty} (n^2 - 3n) \left(\frac{\pi}{n^4} \right)^2 = \pi^2 \left[\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^6} - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{3}{n^7} \right]$$

Так как ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^a}$ сходится при $a > 1$, поэтому ряды $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^6}, \sum_{n=1}^{\infty} \frac{3}{n^7}$ сходятся, значит, сходится и

ряд $\sum_{n=1}^{\infty} (n^2 - 3n) \left(\frac{\pi}{n^4} \right)^2$, а значит, сходится и ряд $\sum_{n=1}^{\infty} (n^2 - 3n) \operatorname{tg}^2 \frac{\pi}{n^4}$

2)

Применим признак сравнения

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n-3}{n^2+3^{\frac{1}{n}}} > \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n-3}{n^2+3^1} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n-3}{n^2+3}$$

Рассмотрим ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ и применим предельный признак сравнения

Переходите на сайт, смотрите больше примеров или закажите свою работу

https://www.matburo.ru/sub_vuz.php?p=mireama

©МатБюро. Решение задач по математике, экономике, программированию

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n-3}{\frac{1}{n}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(2n-3)n}{n^2+3} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n^2-3n}{n^2+3} = 2. \text{ Предел конечен, значит, из расходимости } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$$

следует расходимость $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n-3}{n^2+3}$, а, значит, и расходимость $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n-3}{n^2+3^n}$

3)

Применим признак Даламбера

$$\lambda = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{(3(n+1)-1)(n+1)! \left(\frac{5}{3}\right)^{n+1}}{(2(n+1)+1)!!}}{\frac{(3n-1)n! \left(\frac{5}{3}\right)^n}{(2n+1)!!}} = \frac{5}{3} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3n+2}{3n-1} \frac{(n+1)! (2n+1)!!}{n! (2n+3)!!} = \frac{5}{3} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3n+2}{3n-1} \frac{n+1}{2n+3} = \frac{5}{6} < 1$$

Значит, ряд сходится

4)

Найдем предел n -ого члена ряда

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n^2+1}{n^2+4}\right)^{-n^3} \left(\frac{5}{2}\right)^n &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n^2+4-3}{n^2+4}\right)^{-n^3} \left(\frac{5}{2}\right)^n = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{-3}{n^2+4}\right)^{-n^3} \left(\frac{5}{2}\right)^n = \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left[\left(1 + \frac{-3}{n^2+4}\right)^{\frac{n^2+4}{-3}} \right]^{(-n^3) \left(\frac{-3}{n^2+4}\right)} \left(\frac{5}{2}\right)^n = \lim_{n \rightarrow \infty} e^{\frac{3n^3}{n^2+4}} \left(\frac{5}{2}\right)^n = \lim_{n \rightarrow \infty} e^{3n} \left(\frac{5}{2}\right)^n = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{5e^3}{2}\right)^n = \infty \end{aligned}$$

Переходите на сайт, смотрите больше примеров или закажите свою работу

https://www.matburo.ru/sub_vuz.php?p=mireama

©МатБюро. Решение задач по математике, экономике, программированию

Так как $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n^2 + 1}{n^2 + 4} \right)^{-n^3} \left(\frac{5}{2} \right)^n \neq 0$, поэтому не выполняется необходимый признак сходимости ряда и ряд расходится

Задание 3. Используя интегральный признак Коши, исследовать ряд и оценить его сумму

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{n^4 + 4}$$

Решение.

Используем интегральный признак Коши

$$\begin{aligned} \int_1^{\infty} \frac{x}{x^2 + 4} dx &= \lim_{a \rightarrow \infty} \int_1^a \frac{x}{x^2 + 4} dx = \frac{1}{2} \lim_{a \rightarrow \infty} \int_1^a \frac{2x}{x^2 + 4} dx = \frac{1}{2} \lim_{a \rightarrow \infty} \int_1^a \frac{d(x^2)}{2^2 + (x^2)^2} = \frac{1}{2} \lim_{a \rightarrow \infty} \left[\frac{1}{2} \operatorname{arctg} \frac{x^2}{2} \right]_1^a = \\ &= \frac{1}{2} \lim_{a \rightarrow \infty} \left[\frac{1}{2} \operatorname{arctg} \frac{a^2}{2} - \frac{1}{2} \operatorname{arctg} \frac{1^2}{2} \right] = \frac{1}{2} \left[\frac{1}{2} \frac{\pi}{2} - \frac{1}{2} \operatorname{arctg} \frac{1}{2} \right] = \frac{1}{4} \left[\frac{\pi}{2} - \operatorname{arctg} \frac{1}{2} \right] \end{aligned}$$

Так как интеграл сходится, то и ряд сходится.

Значит,

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{n^4 + 4} > \frac{1}{4} \left[\frac{\pi}{2} - \operatorname{arctg} \frac{1}{2} \right]$$

Задание 4. Исследовать на абсолютную и условную сходимость

1) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{1}{n^4}$

2) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{n}{n^2 + \ln n}$

3) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n^2+3n} \frac{2^n}{n^n + 2^n}$

Переходите на сайт, смотрите больше примеров или закажите свою работу

https://www.matburo.ru/sub_vuz.php?p=mireama

©МатБюро. Решение задач по математике, экономике, программированию

Решение

1)

Рассмотрим сразу абсолютный ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^4}$

Так как ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^a}$ сходится при $a > 1$, значит, ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^4}$ сходится и ряд $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{1}{n^4}$ сходится абсолютно

2)

Пусть $a_n = \frac{n}{n^2 + \ln n} = \frac{1}{n + \frac{\ln n}{n}}$, тогда, получаем

$$a_{n+1} - a_n = \frac{1}{n+1 + \frac{\ln(n+1)}{n+1}} - \frac{1}{n + \frac{\ln n}{n}} < \frac{1}{n+1 + \frac{\ln(n+1)}{n+1}} - \frac{1}{n + \frac{\ln n}{n}} < \frac{1}{n+1 + \frac{\ln n}{n}} - \frac{1}{n + \frac{\ln n}{n}} < 0 \text{ и}$$

$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n + \frac{\ln n}{n}} = 0$, поэтому по признаку Лейбница ряд сходится.

Рассмотрим абсолютный ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{n^2 + \ln n}$

Рассмотрим ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ и применим предельный признак сравнения

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{n}{n^2 + \ln n}}{\frac{1}{n}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2}{n^2 + \ln n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{1 + \frac{\ln n}{n^2}} = 1. \text{ Предел конечен, значит, из расходимости } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$$

следует расходимость $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{n^2 + \ln n}$, а, значит, ряд $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{n}{n^2 + \ln n}$ сходится условно

3)

Переходите на сайт, смотрите больше примеров или закажите свою работу

https://www.matburo.ru/sub_vuz.php?p=mireama

©МатБюро. Решение задач по математике, экономике, программированию

Рассмотрим сразу абсолютный ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{n^n + 2^n}$. Применим признак сравнения и радикальный признак Коши

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{n^n + 2^n} < \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{n^n} = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{2}{n}\right)^n$$
$$\lambda = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\left(\frac{2}{n}\right)^n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2}{n} = 0 < 1$$

Значит, ряд сходится и исходный ряд сходится абсолютно

Задание 5. Используя признак Вейерштрасса, исследовать на равномерную сходимость при $x \in R$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{x^2 - 4nx + 5n^4}$$

Решение

Распишем ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{x^2 - 4nx + 5n^4} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{x^2 - 4nx + 4n^2 - 4n^2 + 5n^4} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(x - 2n)^2 - 4n^2 + 5n^4}$$

Тогда, получаем, что

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{x^2 - 4nx + 5n^4} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(x - 2n)^2 - 4n^2 + 5n^4} \leq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{-4n^2 + 5n^4}$$

Исследуем сходимость ряда $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{-4n^2 + 5n^4}$

Переходите на сайт, смотрите больше примеров или закажите свою работу

https://www.matburo.ru/sub_vuz.php?p=mireama

©МатБюро. Решение задач по математике, экономике, программированию

Рассмотрим сходящийся ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ и применим предельный признак сравнения

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{-4n^2 + 5n^4}}{\frac{1}{n^2}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2}{-4n^2 + 5n^4} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{-4 + 5n^2} = -\frac{1}{4}. \text{ Предел конечен, значит, из сходимости}$$

$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ следует сходимость $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{-4n^2 + 5n^4}$. Значит, по признаку Вейерштрасса, ряд равномерно сходится при $x \in R$

Задание 6. Найти множество x при которых сходится степенной ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(4x+1)^n}{n(-3)^n}$

Решение. Найдем радиус сходимости

$$R = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{\frac{1}{n(-3)^n}}{\frac{1}{(n+1)(-3)^{n+1}}} \right| = 3 \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n+1}{n} = 3$$

$$\text{Значит, } |4x+1| < 3 \Rightarrow x \in \left(-1; \frac{1}{2}\right)$$

Исследуем сходимость на концах интервала

При $x = -1$ получаем ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(4(-1)+1)^n}{n(-3)^n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-3)^n}{n(-3)^n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$, который расходится, так как является гармоническим

Переходите на сайт, смотрите больше примеров или закажите свою работу

https://www.matburo.ru/sub_vuz.php?p=mireama

©МатБюро. Решение задач по математике, экономике, программированию

При $x = \frac{1}{2}$ получаем ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\left(4\frac{1}{2}+1\right)^n}{n(-3)^n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n}{n(-3)^n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n}$, который сходится по признаку

Лейбница, так как $\frac{1}{n+1} < \frac{1}{n}$ и $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} = 0$

Значит, область сходимости - $x \in \left(-1; \frac{1}{2}\right]$

Задание 7. Свести вычисление интеграла к суммированию ряда $I = \int_0^1 \frac{e^{t^2} - \cos t}{t} dt$

Решение

Применим разложение функции в ряд Маклорена

$e^x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!}$, $\cos x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k x^{2k}}{(2k)!}$, тогда получаем

$$\begin{aligned} I &= \int_0^1 \frac{e^{t^2} - \cos t}{t} dt = \int_0^1 \frac{\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(t^2)^k}{k!} - \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k t^{2k}}{(2k)!}}{t} dt = \int_0^1 \frac{\sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^{2k}}{k!} - \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k t^{2k}}{(2k)!}}{t} dt = \\ &= \int_0^1 \frac{\left(1 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{t^{2k}}{k!}\right) - \left(1 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k t^{2k}}{(2k)!}\right)}{t} dt = \int_0^1 \frac{\sum_{k=1}^{\infty} \frac{t^{2k}}{k!} - \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k t^{2k}}{(2k)!}}{t} dt = \int_0^1 \frac{\sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{1}{k!} + \frac{(-1)^{k+1}}{(2k)!}\right) t^{2k}}{t} dt = \\ &= \int_0^1 \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{1}{k!} + \frac{(-1)^{k+1}}{(2k)!}\right) t^{2k-1} dt = \sum_{k=1}^{\infty} \int_0^1 \left(\frac{1}{k!} + \frac{(-1)^{k+1}}{(2k)!}\right) t^{2k-1} dt = \sum_{k=1}^{\infty} \left[\frac{1}{2k} \left(\frac{1}{k!} + \frac{(-1)^{k+1}}{(2k)!}\right) t^{2k} \right]_0^1 = \\ &= \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2k} \left(\frac{1}{k!} + \frac{(-1)^{k+1}}{(2k)!}\right) \end{aligned}$$

Переходите на сайт, смотрите больше примеров или закажите свою работу

https://www.matburo.ru/sub_vuz.php?p=mireama

©МатБюро. Решение задач по математике, экономике, программированию

Задание 8. Разложить в ряд Фурье функцию $f(x) = |x| + 4$, заданную на интервале $x \in (-1; 1)$. Выписать равенство Парсеваля для данной функции. Найти сумму соответствующего ряда.

Решение.

Так как функция четная ($f(-x) = |-x| + 4 = |x| + 4 = f(x)$), поэтому $b_n \equiv 0$

Запишем $f(x)$ в другом виде

$$f(x) = \begin{cases} x + 4, & x \in [0; 1] \\ -x + 4, & x \in [-1; 0] \end{cases}$$

Найдем a_n

Параметр $l = 1$

Вычислим коэффициенты ряда Фурье

$$a_0 = \frac{1}{1} \int_{-1}^1 f(x) dx = \int_{-1}^0 (-x + 4) dx + \int_0^1 (x + 4) dx = \left[-\frac{x^2}{2} + 4x \right]_{-1}^0 + \left[\frac{x^2}{2} + 4x \right]_0^1 = -\left[-\frac{1}{2} - 4 \right] + \left[\frac{1}{2} + 4 \right] = 9$$

Переходите на сайт, смотрите больше примеров или закажите свою работу

https://www.matburo.ru/sub_vuz.php?p=mireama

©МатБюро. Решение задач по математике, экономике, программированию

$$\begin{aligned}
 a_n &= \frac{1}{1} \int_{-1}^1 f(x) \cos \frac{\pi n x}{1} dx = \int_{-1}^0 (-x+4) \cos \pi n x dx + \int_0^1 (x+4) \cos \pi n x dx = \\
 &= -\int_{-1}^0 x \cos \pi n x dx + 4 \int_{-1}^0 \cos \pi n x dx + \int_0^1 x \cos \pi n x dx + 4 \int_0^1 \cos \pi n x dx = \\
 &= -\int_{-1}^0 x \cos \pi n x dx + \int_0^1 x \cos \pi n x dx + 4 \int_{-1}^1 \cos \pi n x dx = \dots \\
 \int x \cos \pi n x dx &= \left| \begin{array}{l} u = x \quad du = dx \\ dv = \cos \pi n x \quad v = \frac{1}{\pi n} \sin \pi n x \end{array} \right| = x \frac{1}{\pi n} \sin \pi n x - \int \frac{1}{\pi n} \sin \pi n x dx = \\
 &= \frac{x \sin \pi n x}{\pi n} + \frac{\cos \pi n x}{(\pi n)^2} \\
 \dots &= -\left[\frac{x \sin \pi n x}{\pi n} + \frac{\cos \pi n x}{(\pi n)^2} \right]_{-1}^0 + \left[\frac{x \sin \pi n x}{\pi n} + \frac{\cos \pi n x}{(\pi n)^2} \right]_0^1 + 4 \left[\frac{\sin \pi n x}{\pi n} \right]_{-1}^1 = \\
 &= -\left[\frac{0 \sin \pi n 0}{\pi n} + \frac{\cos \pi n 0}{(\pi n)^2} \right] + \left[\frac{-1 \sin \pi n (-1)}{\pi n} + \frac{\cos \pi n (-1)}{(\pi n)^2} \right] + \left[\frac{1 \sin \pi n 1}{\pi n} + \frac{\cos \pi n 1}{(\pi n)^2} \right] - \left[\frac{0 \sin \pi n 0}{\pi n} + \frac{\cos \pi n 0}{(\pi n)^2} \right] + \\
 &+ 4 \left[\frac{\sin \pi n 1}{\pi n} \right] - 4 \left[\frac{\sin \pi n (-1)}{\pi n} \right] = -\frac{1}{(\pi n)^2} + \frac{(-1)^n}{(\pi n)^2} + \frac{(-1)^n}{(\pi n)^2} - \frac{1}{(\pi n)^2} = \frac{2}{(\pi n)^2} ((-1)^n - 1)
 \end{aligned}$$

Тогда,

$$f(x) = \frac{9}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{(\pi n)^2} ((-1)^n - 1) \cos \pi n x$$

Запишем равенство Парсеваля

$$\frac{9}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{2}{(\pi n)^2} ((-1)^n - 1) \right)^2 = \int_{-1}^1 f^2(x) dx = \int_{-1}^1 (|x|+4)^2 dx$$

$$\frac{9}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4}{(\pi n)^4} (1 - 2(-1)^n + 1) = \int_{-1}^1 (|x|+4)^2 dx$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{8}{(\pi n)^4} (1 - (-1)^n) = \int_{-1}^1 (|x|+4)^2 dx - \frac{9}{2}$$

Переходите на сайт, смотрите больше примеров или закажите свою работу

https://www.matburo.ru/sub_vuz.php?p=mireama

©МатБюро. Решение задач по математике, экономике, программированию

Найдем $\int_{-1}^1 (|x|+4)^2 dx$

$$\begin{aligned} \int_{-1}^1 (|x|+4)^2 dx &= \int_{-1}^0 (-x+4)^2 dx + \int_0^1 (x+4)^2 dx = \int_{-1}^0 (x-4)^2 dx + \int_0^1 (x+4)^2 dx = \\ &= \left[\frac{(x-4)^3}{3} \right]_{-1}^0 + \left[\frac{(x+4)^3}{3} \right]_0^1 = \frac{(0-4)^3}{3} - \frac{(-1-4)^3}{3} + \frac{(1+4)^3}{3} - \frac{(0+4)^3}{3} = \frac{122}{3} \end{aligned}$$

Тогда,

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{8}{(\pi n)^4} (1 - (-1)^n) = \frac{122}{3} - \frac{9}{2} = \frac{217}{6}$$