

Решение контрольной работы выполнено на сайте www.matburo.ru

Переходите на сайт, смотрите больше примеров или закажите свою работу

https://www.matburo.ru/sub_vuz.php?p=mesivm

©МатБюро. Решение задач по математике, экономике, программированию

МЭСИ. Высшая математика
Контрольная работа № 4

154. Найти общее решение или общий интеграл дифференциального уравнения:

$$y' = x^2 + 2x - 2y.$$

Решение:

Перенесем $-2y$ в левую часть уравнения:

$$y' + 2y = x^2 + 2x.$$

Умножим обе части полученного уравнения на множитель $\mu(x) = e^{\int 2dx} = e^{2x}$:

$$y'e^{2x} + 2ye^{2x} = (x^2 + 2x)e^{2x}.$$

Левая часть теперь представляет собой производную по x от произведения $y\mu(x)$:

$$\frac{d}{dx}(y\mu(x)) = \frac{d}{dx}(ye^{2x}) = y'e^{2x} + 2ye^{2x}.$$

Значит, можно записать

Решение контрольной работы выполнено на сайте www.matburo.ru

Переходите на сайт, смотрите больше примеров или закажите свою работу

https://www.matburo.ru/sub_vuz.php?p=mesivm

©МатБюро. Решение задач по математике, экономике, программированию

$$\begin{aligned}\frac{d}{dx}(ye^{2x}) &= (x^2 + 2x)e^{2x} \Leftrightarrow d(ye^{2x}) = (x^2 + 2x)e^{2x} dx \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow \int d(ye^{2x}) &= \int (x^2 + 2x)e^{2x} dx \Leftrightarrow ye^{2x} = \int (x^2 + 2x)e^{2x} dx.\end{aligned}$$

Вычислим отдельно интеграл

$$\begin{aligned}\int (x^2 + 2x)e^{2x} dx &= \left. \begin{array}{l} \text{по частям} \\ u = x^2 + 2x, dv = e^{2x} dx, \\ du = (2x + 2)dx, v = \frac{1}{2}e^{2x} \end{array} \right\} = \frac{1}{2}(x^2 + 2x)e^{2x} + \int (x + 1)e^{2x} dx = \\ &= \left. \begin{array}{l} \text{по частям} \\ t = x + 1, dk = e^{2x} dx, \\ dt = dx, k = \frac{1}{2}e^{2x} \end{array} \right\} = \frac{1}{2}(x^2 + 2x)e^{2x} + \frac{1}{2}(x + 1)e^{2x} - \frac{1}{2} \int e^{2x} dx = \\ &= \frac{1}{2}(x^2 + 3x + 1)e^{2x} - \frac{1}{4}e^{2x} + C = \frac{1}{2}\left(x^2 + 3x + \frac{1}{2}\right)e^{2x} + C, \quad C - \text{константа.}\end{aligned}$$

Таким образом,

$$ye^{2x} = \frac{1}{2}\left(x^2 + 3x + \frac{1}{2}\right)e^{2x} + C \quad y(x) = \frac{1}{2}\left(x^2 + 3x + \frac{1}{2}\right) + Ce^{-2x}.$$

Решение контрольной работы выполнено на сайте www.matburo.ru

Переходите на сайт, смотрите больше примеров или закажите свою работу

https://www.matburo.ru/sub_vuz.php?p=mesivm

©МатБюро. Решение задач по математике, экономике, программированию

Ответ: $y(x) = \frac{1}{2} \left(x^2 + 3x + \frac{1}{2} \right) + Ce^{-2x}$.

164. Найти частное решение дифференциального уравнения $y'' + py' + qy = f(x)$, удовлетворяющего начальным условиям $y(x_0) = y_0$, $y'(x_0) = y'_0$:

$$y'' + y = \cos 3x, \quad y\left(\frac{\pi}{2}\right) = 4, \quad y'\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1.$$

Решение:

Найдем для начала общее решение заданного уравнения. Ищем его в виде суммы:

$$y(x) = \bar{y}(x) + \tilde{y}(x), \quad (1)$$

где $\bar{y}(x)$ – общее решение однородного уравнения

$$y'' + y = 0, \quad (2)$$

$\tilde{y}(x)$ – одно из частных решений исходного неоднородного уравнения.

Решим уравнение (1). Найдем корни характеристического многочлена

Решение контрольной работы выполнено на сайте www.matburo.ru

Переходите на сайт, смотрите больше примеров или закажите свою работу

https://www.matburo.ru/sub_vuz.php?p=mesivm

©МатБюро. Решение задач по математике, экономике, программированию

$$\lambda^2 + \lambda = 0 \Leftrightarrow \lambda_1 = 0, \lambda_2 = -1.$$

Следовательно, общее решение (1)

$$\bar{y}(x) = C_1 e^0 + C_2 e^{-x} = C_1 + C_2 e^{-x}.$$

Частное решение $\tilde{y}(x)$, исходя из вида функции $f(x) = \cos 3x$, ищем в виде:

$$\tilde{y}(x) = a \sin 3x + b \cos 3x.$$

Находим производные:

$$\tilde{y}'(x) = 3a \cos 3x - 3b \sin 3x,$$

$$\tilde{y}''(x) = -9a \sin 3x - 9b \cos 3x.$$

Подставляем в исходное уравнение:

$$-9a \sin 3x - 9b \cos 3x + a \sin 3x + b \cos 3x = \cos 3x \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} -8a = 0 \\ -8b = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 0 \\ b = -\frac{1}{8} \end{cases}.$$

Решение контрольной работы выполнено на сайте www.matburo.ru

Переходите на сайт, смотрите больше примеров или закажите свою работу

https://www.matburo.ru/sub_vuz.php?p=mesivm

©МатБюро. Решение задач по математике, экономике, программированию

Значит,

$$\tilde{y}(x) = -\frac{1}{8} \cos 3x.$$

Таким образом, общее решение исходного уравнения, исходя из (1):

$$y(x) = C_1 + C_2 e^{-x} - \frac{1}{8} \cos 3x.$$

Константы C_1 и C_2 находим из начальных условий. Найдем производную:

$$y'(x) = -C_2 e^{-x} + \frac{3}{8} \sin 3x.$$

$$y\left(\frac{\pi}{2}\right) = C_1 + C_2 e^{-\frac{\pi}{2}} = 4,$$

$$y'\left(\frac{\pi}{2}\right) = -C_2 e^{-\frac{\pi}{2}} - \frac{3}{8} = 1.$$

$$-\frac{C_2}{e^{\frac{\pi}{2}}} = \frac{11}{8} \Rightarrow C_2 = -\frac{11e^{\frac{\pi}{2}}}{8},$$

$$C_1 + C_2 e^{-\frac{\pi}{2}} = 4 \Leftrightarrow C_1 - \frac{11}{8} = 4 \Rightarrow C_1 = \frac{43}{8}.$$

Решение контрольной работы выполнено на сайте www.matburo.ru

Переходите на сайт, смотрите больше примеров или закажите свою работу

https://www.matburo.ru/sub_vuz.php?p=mesivm

©МатБюро. Решение задач по математике, экономике, программированию

Ответ: $y(x) = \frac{43}{8} - \frac{11}{8} e^{\frac{\pi}{2}-x} - \frac{1}{8} \cos 3x.$

174. Найти область сходимости степенного ряда:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n x^{2n}}{n+1}.$$

Решение:

Воспользуемся признаком Даламбера:

$$q = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left[\frac{2^{n+1} |x|^{2n+2}}{n+2} \cdot \frac{n+1}{2^n |x|^{2n}} \right] = 2|x|^2 \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n+1}{n+2} = 2x^2 \cdot 1 = 2x^2.$$

По признаку Даламбера ряд будет сходиться, если $q < 1 \Leftrightarrow 2x^2 < 1 \Leftrightarrow x \in \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right),$

и расходится, если $x \in \left(-\infty, -\frac{1}{\sqrt{2}}\right) \cup \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, +\infty\right).$

Дополнительно исследуем, если $x = \pm \frac{1}{\sqrt{2}}.$

Решение контрольной работы выполнено на сайте www.matburo.ru

Переходите на сайт, смотрите больше примеров или закажите свою работу

https://www.matburo.ru/sub_vuz.php?p=mesivm

©МатБюро. Решение задач по математике, экономике, программированию

(а) при $x = \frac{1}{\sqrt{2}}$. Тогда наш ряд примет вид:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n+1}.$$

Это расходящийся гармонический ряд.

(б) при $x = -\frac{1}{\sqrt{2}}$. Ряд примет также вид:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n+1}.$$

Ответ: ряд сходится на интервале $\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$

и расходится на $\left(-\infty, -\frac{1}{\sqrt{2}}\right] \cup \left[\frac{1}{\sqrt{2}}, +\infty\right)$.

184. Вычислить определенный интеграл с точностью до 0,001, разложив подынтегральную функцию в ряд и почленно интегрируя этот ряд:

$$\int_0^1 e^{-x^2} dx.$$

Решение контрольной работы выполнено на сайте www.matburo.ru

Переходите на сайт, смотрите больше примеров или закажите свою работу

https://www.matburo.ru/sub_vuz.php?p=mesivm

©МатБюро. Решение задач по математике, экономике, программированию

Решение:

Запишем разложение в ряд Маклорена для экспоненты:

$$e^z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!} = 1 + z + \frac{z^2}{2} + \frac{z^3}{6} + \dots \quad (1)$$

Положим в (1) $z = -x^2$:

$$e^{-x^2} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-x^2)^n}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!} x^{2n} = 1 - x^2 + \frac{x^4}{2} - \frac{x^6}{6} + \dots \quad (2)$$

Интегрируем почленно ряд (2):

$$\begin{aligned} \int_0^1 e^{-x^2} dx &= \int_0^1 \left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!} x^{2n} \right) dx = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\int_0^1 \frac{(-1)^n}{n!} x^{2n} dx \right) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!} \cdot \left(\int_0^1 x^{2n} dx \right) = \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!} \cdot \left(\frac{x^{2n+1}}{2n+1} \Big|_0^1 \right) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!(2n+1)}. \end{aligned} \quad (3)$$

Так как при $n = 5$ $\frac{1}{n!(2n+1)} = \frac{1}{120 \cdot 11} = \frac{1}{1320} < 0.001$, то вычислим первые 6 членов разложения

(3):

Решение контрольной работы выполнено на сайте www.matburo.ru

Переходите на сайт, смотрите больше примеров или закажите свою работу

https://www.matburo.ru/sub_vuz.php?p=mesivm

©МатБюро. Решение задач по математике, экономике, программированию

$$\int_0^1 e^{-x^2} dx \approx \sum_{n=0}^5 \frac{(-1)^n}{n!(2n+1)} = \frac{1}{1} - \frac{1}{1 \cdot 3} + \frac{1}{2 \cdot 5} - \frac{1}{6 \cdot 7} + \frac{1}{24 \cdot 9} - \frac{1}{120 \cdot 11} =$$
$$= \frac{83160 - 27720 + 8316 - 1980 + 385 - 63}{120 \cdot 11 \cdot 9 \cdot 7} = \frac{62098}{83160} \approx 0.7467.$$

Ответ: $\int_0^1 e^{-x^2} dx \approx 0.7467.$