

## Решение билета по высшей математике (МАИ)

Вариант 104.

### Задача 1.

Найти целочисленное решение системы линейных алгебраических уравнений

$$\begin{cases} 2x_1 - 4x_2 - 5x_3 - x_4 - 4x_5 = -12 \\ 3x_1 - 2x_2 - x_3 - x_4 + x_5 = 0 \\ 5x_1 - 6x_2 - 6x_3 - 2x_4 - 2x_5 = -11 \end{cases}$$

Найти целочисленное решение соответствующей однородной системы линейных алгебраических уравнений и укажите ее фундаментальную систему решений, если это возможно.

### Решение

Запишем расширенную матрицу системы, перобразуем ее

$$\begin{aligned} & \left( \begin{array}{ccccc|c} 2 & -4 & -5 & -1 & -4 & -12 \\ 3 & -2 & -1 & -1 & 1 & 0 \\ 5 & -6 & -6 & -2 & -2 & -12 \end{array} \right) \sim \left( \begin{array}{ccccc|c} 2 & -4 & -5 & -1 & -4 & -12 \\ 0 & 8 & 13 & 1 & 14 & 36 \\ 0 & 8 & 13 & 1 & 16 & 38 \end{array} \right) \sim \\ & \sim \left( \begin{array}{ccccc|c} 2 & -4 & -5 & -1 & -4 & -12 \\ 0 & 8 & 13 & 1 & 14 & 36 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{array} \right) \sim \left( \begin{array}{ccccc|c} 2 & -4 & -5 & -1 & 0 & -8 \\ 0 & 8 & 13 & 1 & 0 & 22 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{array} \right) \sim \\ & \sim \left( \begin{array}{ccccc|c} 2 & 4 & 8 & 0 & 0 & 14 \\ 0 & 8 & 13 & 1 & 0 & 22 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{array} \right) \sim \left( \begin{array}{ccccc|c} 1 & 2 & 4 & 0 & 0 & 7 \\ 0 & 8 & 13 & 1 & 0 & 22 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{array} \right) \end{aligned}$$

Ранг матрицы равен трем, переменных пять, свободных переменных две.

Выразим переменные  $x_1, x_4, x_5$  через переменные  $x_2, x_3$

Решение контрольной работы выполнено на сайте [www.matburo.ru](http://www.matburo.ru)  
Переходите на сайт, смотрите больше примеров или закажите свою работу  
[https://www.matburo.ru/sub\\_vuz.php?p=maivm](https://www.matburo.ru/sub_vuz.php?p=maivm)  
©МатБюро. Решение задач по математике, экономике, программированию

$$\begin{cases} x_1 = 7 - 2x_2 - 4x_3 \\ x_4 = 22 - 8x_2 - 13x_3 \\ x_5 = 1 \end{cases}$$

Положим  $x_2 = 1, x_3 = 0$ , получим

$$\begin{cases} x_1 = 7 - 2 - 0 = 5 \\ x_4 = 22 - 8 - 0 = 14 \\ x_5 = 1 \end{cases}$$

$$X_1 = \begin{pmatrix} 5 \\ 1 \\ 0 \\ 14 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Положим  $x_2 = 0, x_3 = 1$ , получим

$$\begin{cases} x_1 = 7 - 0 - 4 = 3 \\ x_4 = 22 - 0 - 13 = 9 \\ x_5 = 1 \end{cases}$$

$$X_2 = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 1 \\ 9 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Общее решение

$$X = C_1 X_1 + C_2 X_2 = C_1 \begin{pmatrix} 5 \\ 1 \\ 0 \\ 14 \\ 1 \end{pmatrix} + C_2 \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 1 \\ 9 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Запишем соответствующую однородную систему

$$\begin{cases} 2x_1 - 4x_2 - 5x_3 - x_4 - 4x_5 = 0 \\ 3x_1 - 2x_2 - x_3 - x_4 + x_5 = 0 \\ 5x_1 - 6x_2 - 6x_3 - 2x_4 - 2x_5 = 0 \end{cases}$$

Запишем матрицу системы и преобразуем ее

$$\begin{pmatrix} 2 & -4 & -5 & -1 & -4 \\ 3 & -2 & -1 & -1 & 1 \\ 5 & -6 & -6 & -2 & -2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 2 & -4 & -5 & -1 & -4 \\ 0 & 8 & 13 & 1 & 14 \\ 0 & 8 & 13 & 1 & 16 \end{pmatrix} \sim \\ \sim \begin{pmatrix} 2 & -4 & -5 & -1 & -4 \\ 0 & 8 & 13 & 1 & 14 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 2 & -4 & -5 & -1 & 0 \\ 0 & 8 & 13 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \sim \\ \sim \begin{pmatrix} 2 & 4 & 8 & 0 & 0 \\ 0 & 8 & 13 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 & 0 & 0 \\ 0 & 8 & 13 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Ранг матрицы равен трем, переменных пять, свободных переменных две.

Выразим переменные  $x_1, x_4, x_5$  через переменные  $x_2, x_3$

$$\begin{cases} x_1 = -2x_2 - 4x_3 \\ x_4 = -8x_2 - 13x_3 \\ x_5 = 0 \end{cases}$$

Положим  $x_2 = 1, x_3 = 0$ , получим

$$\begin{cases} x_1 = -2 - 0 = -2 \\ x_4 = -8 - 0 = -8 \\ x_5 = 0 \end{cases}$$

$$X_1 = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \\ -8 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Положим  $x_2 = 0, x_3 = 1$ , получим

$$\begin{cases} x_1 = -0 - 4 = -4 \\ x_4 = -0 - 13 = -13 \\ x_5 = 0 \end{cases}$$

Решение контрольной работы выполнено на сайте [www.matburo.ru](http://www.matburo.ru)  
 Переходите на сайт, смотрите больше примеров или закажите свою работу  
[https://www.matburo.ru/sub\\_vuz.php?p=maivm](https://www.matburo.ru/sub_vuz.php?p=maivm)  
 ©МатБюро. Решение задач по математике, экономике, программированию

$$X_2 = \begin{pmatrix} -4 \\ 0 \\ 1 \\ -13 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Общее решение

$$X = C_1 X_1 + C_2 X_2 = C_1 \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \\ -8 \\ 0 \end{pmatrix} + C_2 \begin{pmatrix} -4 \\ 0 \\ 1 \\ -13 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Столбцы  $X_1, X_2$  составляют фундаментальную систему решений.

**Ответ.** Общее решение неоднородной системы

$$X = C_1 \begin{pmatrix} 5 \\ 1 \\ 0 \\ 14 \\ 1 \end{pmatrix} + C_2 \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 1 \\ 9 \\ 1 \end{pmatrix}, C_1, C_2 - \text{целые}$$

Фундаментальная система решений однородной системы

$$X_1 = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \\ -8 \\ 0 \end{pmatrix}; X_2 = \begin{pmatrix} -4 \\ 0 \\ 1 \\ -13 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Общее решение однородной системы

$$X = C_1 \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \\ -8 \\ 0 \end{pmatrix} + C_2 \begin{pmatrix} -4 \\ 0 \\ 1 \\ -13 \\ 0 \end{pmatrix}, C_1, C_2 - \text{целые}$$

## Задача 2.

Найдите  $x$  из уравнения

Решение контрольной работы выполнено на сайте [www.matburo.ru](http://www.matburo.ru)  
 Переходите на сайт, смотрите больше примеров или закажите свою работу  
[https://www.matburo.ru/sub\\_vuz.php?p=maivm](https://www.matburo.ru/sub_vuz.php?p=maivm)  
 ©МатБюро. Решение задач по математике, экономике, программированию

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & -5 & 8 \\ -1 & -1 & 4 & -6 \\ -2/3 & 3 & x & -5 \\ -2/3 & -1/2 & 5/2 & -3 \end{vmatrix} = -3$$

**Решение.**

Разложим определитель по элементам третьей строки. Уравнение примет вид:

$$-\frac{2}{3} \cdot (-1)^{3+1} \cdot \begin{vmatrix} 0 & -5 & 8 \\ -1 & 4 & -6 \\ -\frac{1}{2} & \frac{5}{2} & -3 \end{vmatrix} + 3 \cdot (-1)^{3+2} \cdot \begin{vmatrix} 1 & -5 & 8 \\ -1 & 4 & -6 \\ -\frac{2}{3} & \frac{5}{2} & -3 \end{vmatrix} +$$

$$+ x \cdot (-1)^{3+3} \cdot \begin{vmatrix} 1 & 0 & 8 \\ -1 & -1 & -6 \\ -\frac{2}{3} & -\frac{1}{2} & -3 \end{vmatrix} - 5 \cdot (-1)^{3+4} \cdot \begin{vmatrix} 1 & 0 & -5 \\ -1 & -1 & 4 \\ -\frac{2}{3} & -\frac{1}{2} & \frac{5}{2} \end{vmatrix} = -3$$

$$\begin{vmatrix} 0 & -5 & 8 \\ -1 & 4 & -6 \\ -\frac{1}{2} & \frac{5}{2} & -3 \end{vmatrix} = 0 - 20 - 15 - (-16 + 0 - 15) = -4$$

$$\begin{vmatrix} 1 & -5 & 8 \\ -1 & 4 & -6 \\ -\frac{2}{3} & \frac{5}{2} & -3 \end{vmatrix} = -12 - 20 - 20 - \left(-\frac{64}{3} - 15 - 15\right) = -\frac{2}{3}$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 8 \\ -1 & -1 & -6 \\ -\frac{2}{3} & -\frac{1}{2} & -3 \end{vmatrix} = 3 + 4 + 0 - \left(\frac{16}{3} + 3 + 0\right) = -\frac{4}{3}$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & -5 \\ -1 & -1 & 4 \\ -\frac{2}{3} & -\frac{1}{2} & \frac{5}{2} \end{vmatrix} = -\frac{5}{2} - \frac{5}{2} + 0 - \left(-\frac{10}{3} - 2 + 0\right) = \frac{1}{3}$$

$$-\frac{2}{3} \cdot (-4) - 3 \cdot \left(-\frac{2}{3}\right) + x \cdot \left(-\frac{4}{3}\right) + 5 \cdot \frac{1}{3} = -3$$

Решение контрольной работы выполнено на сайте [www.matburo.ru](http://www.matburo.ru)  
Переходите на сайт, смотрите больше примеров или закажите свою работу  
[https://www.matburo.ru/sub\\_vuz.php?p=maivm](https://www.matburo.ru/sub_vuz.php?p=maivm)  
©МатБюро. Решение задач по математике, экономике, программированию

$$\frac{8}{3} + 2 - \frac{4}{3}x + \frac{5}{3} = -3$$

$$x = 7$$

**Ответ.**  $x = 7$ .

### Задача 3.

Решите матричное уравнение.

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 0 & 3 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix} \cdot X \cdot \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 1 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 5 \\ -3 & 10 \\ 7 & 6 \end{pmatrix}$$

**Решение.**

$$X = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 0 & 3 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}^{-1} \cdot \begin{pmatrix} 4 & 5 \\ -3 & 10 \\ 7 & 6 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}^{-1}$$

Найдем матрицу  $\begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 0 & 3 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}^{-1}$

$$\begin{vmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 0 & 3 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \end{vmatrix} = 12 + 0 - 1 - (0 + 0 + 0) = 11$$

$$A_{11} = \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} = 6; A_{12} = -\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 1; A_{13} = \begin{vmatrix} 0 & 3 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = -3$$

$$A_{21} = -\begin{vmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} = 2; A_{22} = \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 4; A_{23} = -\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = -1$$

$$A_{31} = \begin{vmatrix} -1 & 0 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} = -1; A_{32} = -\begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = -2; A_{33} = \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 3 \end{vmatrix} = 6$$

Решение контрольной работы выполнено на сайте [www.matburo.ru](http://www.matburo.ru)  
 Переходите на сайт, смотрите больше примеров или закажите свою работу  
[https://www.matburo.ru/sub\\_vuz.php?p=maivm](https://www.matburo.ru/sub_vuz.php?p=maivm)  
 ©МатБюро. Решение задач по математике, экономике, программированию

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 0 & 3 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{11} \begin{pmatrix} 6 & 2 & -1 \\ 1 & 4 & -2 \\ -3 & -1 & 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{6}{11} & \frac{2}{11} & -\frac{1}{11} \\ \frac{1}{11} & \frac{4}{11} & -\frac{2}{11} \\ -\frac{3}{11} & -\frac{1}{11} & \frac{6}{11} \end{pmatrix}$$

Найдем  $\begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}^{-1}$

$$\begin{vmatrix} 2 & -3 \\ 1 & 4 \end{vmatrix} = 8 + 3 = 11$$

$$A_{11} = 4; A_{12} = -1; A_{21} = 3; A_{22} = 2$$

$$\begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{4}{11} & \frac{3}{11} \\ \frac{1}{11} & \frac{2}{11} \end{pmatrix}$$

Уравнение примет вид

$$X = \begin{pmatrix} \frac{6}{11} & \frac{2}{11} & -\frac{1}{11} \\ \frac{1}{11} & \frac{4}{11} & -\frac{2}{11} \\ \frac{11}{3} & \frac{1}{11} & \frac{6}{11} \\ -\frac{3}{11} & -\frac{1}{11} & \frac{6}{11} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 4 & 5 \\ -3 & 10 \\ 7 & 6 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \frac{4}{11} & \frac{3}{11} \\ \frac{1}{11} & \frac{2}{11} \\ -\frac{1}{11} & \frac{11}{11} \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} \frac{6}{11} & \frac{2}{11} & -\frac{1}{11} \\ \frac{1}{11} & \frac{4}{11} & -\frac{2}{11} \\ \frac{11}{3} & \frac{1}{11} & \frac{6}{11} \\ -\frac{3}{11} & -\frac{1}{11} & \frac{6}{11} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 4 & 5 \\ -3 & 10 \\ 7 & 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{24-6-7}{11} & \frac{30+20-6}{11} \\ \frac{4-12-14}{11} & \frac{5+40-12}{11} \\ \frac{11}{11} & \frac{11}{11} \\ \frac{-12+3+42}{11} & \frac{-15-10+36}{11} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ -2 & 3 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$$

Решение контрольной работы выполнено на сайте [www.matburo.ru](http://www.matburo.ru)  
 Переходите на сайт, смотрите больше примеров или закажите свою работу  
[https://www.matburo.ru/sub\\_vuz.php?p=maivm](https://www.matburo.ru/sub_vuz.php?p=maivm)  
 ©МатБюро. Решение задач по математике, экономике, программированию

$$X = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ -2 & 3 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \frac{4}{11} & \frac{3}{11} \\ -\frac{1}{11} & \frac{2}{11} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{4-4}{11} & \frac{3+8}{11} \\ \frac{-8-3}{11} & \frac{-6+6}{11} \\ \frac{12-1}{11} & \frac{9+2}{11} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Ответ.  $X = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$

### Задача 5.

Образуют ли линейное пространство матрицы, перестановочные с матрицей

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$$

Если да, укажите размерность этого пространства и его базис.

### Решение.

Запишем матрицу, перестановочную с  $A$ , в общем виде.

$$B = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

Из того, что матрица  $B$  - перестановочная с  $A$ :

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 2a+c & 2b+d \\ a-c & b-d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2a+b & a-b \\ 2c+d & c-d \end{pmatrix}$$

Две матрицы равны тогда, когда равны их соответствующие элементы.

Получим систему уравнений:

$$\begin{cases} 2a+c = 2a+b \\ 2b+d = a-b \\ a-c = 2c+d \\ b-d = c-d \end{cases}$$



Решение контрольной работы выполнено на сайте [www.matburo.ru](http://www.matburo.ru)  
Переходите на сайт, смотрите больше примеров или закажите свою работу  
[https://www.matburo.ru/sub\\_vuz.php?p=maivm](https://www.matburo.ru/sub_vuz.php?p=maivm)  
©МатБюро. Решение задач по математике, экономике, программированию

$$\begin{cases} b - c = 0 \\ a - 3b - d = 0 \\ a - 3c - d = 0 \\ b - c = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} b - c = 0 \\ a - 3c - d = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} b = c \\ a = 3c + d \end{cases}$$

Итак, матрицы перестановочные с  $A$ , имеют вид:

$$\begin{pmatrix} 3c + d & c \\ c & d \end{pmatrix}$$

Множество  $L$  образует линейное пространство, если для любых двух его элементов  $x, y$  определены операции сложения  $x + y \in L$  и умножения на действительное число  $a \in R; ax \in L$  со свойствами:

1.  $x + y = y + x$
2.  $(x + y) + z = x + (y + z)$
3. существует нулевой элемент  $0 \in L: a + 0 = a$
4. для любого элемента  $x \in L$  существует элемент  $y \in L: x + y = 0$   
В данном случае  $y = -1 \cdot x$

Для любых  $x, y \in L$  и любых действительных чисел  $a, b$

5.  $1 \cdot x = x$
6.  $a(bx) = (ab)x$
7.  $(a + b)x = ax + bx$
8.  $a(x + y) = ax + ay$

Очевидно, все эти свойства выполняются для матриц указанного вида.

Матрицы, перестановочные с матрицей  $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$ , образуют линейное пространство.

Решение контрольной работы выполнено на сайте [www.matburo.ru](http://www.matburo.ru)  
Переходите на сайт, смотрите больше примеров или закажите свою работу  
[https://www.matburo.ru/sub\\_vuz.php?p=maivm](https://www.matburo.ru/sub_vuz.php?p=maivm)  
©МатБюро. Решение задач по математике, экономике, программированию

Матрицы вида  $\begin{pmatrix} 3c + d & c \\ c & d \end{pmatrix}$  зависят от двух параметров, то есть размерность линейного пространства, образованного такими матрицами, равна 2.

Положив  $c = 1, d = 0$ , получим матрицу  $\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$

Положив  $c = 0, d = 1$ , получим матрицу  $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

Очевидно, эти матрицы линейно независимы. Так как размерность указанного линейного пространства равна 2, любые две линейно независимые матрицы образуют базис.

Базис указанного линейного пространства:  $\left\{ \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}$

**Ответ.**

Матрицы, перестановочные с матрицей  $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$ , образуют линейное пространство размерности 2, базис :  $\left\{ \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}$