Контрольная работа по теории вероятностей (МАИ)

Задача 5.

Для беспрепятственного полета над некоторой территорией самолет приближаясь к ней обязан послать по радио парольную кодовую группу из пяти элементов (точек, тире). Какова вероятность того, что радист, не знающий парольной группы, угадает ее, передав какую-то группу наугад.

Решение.

Согласно классическому определению вероятности, вероятность события равна отношению числа исходов, благоприятных событию (M), к общему числу исходов N.

Общее число исходов N - это количество парольных кодовых групп, то есть комбинаций из 5 элементов (точек, тире). Первым символом кода может быть точка или тире (2 варианта), вторым - тоже точка или тире (2 варианта), для третьего, четвертого и пятого символов тоже два варианта выбора (для каждого). Всего способов составить код существует

$$N = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 = 2^5 = 32$$

Количество благоприятных исходов $M = 1$ (верный пароль всего один).

Тогда искомая вероятность верно угадать пароль:

$$P = \frac{M}{N} = \frac{1}{32} = 0.03125$$

Ответ. $\frac{1}{32} = 0.03125$

Задача 32.

По самолету производится три выстрела. Вероятность попадания при первом выстреле равна 0.6, при втором – 0.7, при третьем – 0.8. При одном попадании, самолет сбит с вероятностью 0.3, при двух – с вероятностью 0.5, при трех – самолет будет сбит наверняка. Какова вероятность того, что самолет будет сбит? Если известно, что самолёт сбит, какое число попаданий наиболее вероятно?

Решение.

Обозначим события:

A_1 - при первом выстреле было попадание, A_2 - при втором выстреле было попадание, A_3 - при третьем выстреле было попадание. Задано: $P(A_1)=0.6; P(A_2)=0.7; P(A_3)=0.8$. Полагаем, что события A_1, A_2, A_3 независимы в совокупности.

B_0 - было 0 попаданий , B_1- одно попадание, B_2 - два попадания, B_3 - три попадания. Найдем вероятности этих событий.

$$P(B_0)=P(\bar{A}_1\bar{A}_2\bar{A}_3)=P(\bar{A}_1)P(\bar{A}_2)P(\bar{A}_3)$$
$$=\big(1-P(A_1)\big)\big(1-P(A_2)\big)\big(1-P(A_3)\big)=$$
$$=(1-0.6)(1-0.7)(1-0.8)=0.024$$

$$P(B_1)=P(A_1\bar{A}_2\bar{A}_3+\bar{A}_1A_2\bar{A}_3+\bar{A}_1\bar{A}_2A_3)$$
$$=P(A_1\bar{A}_2\bar{A}_3)+P(\bar{A}_1A_2\bar{A}_3)+P(\bar{A}_1\bar{A}_2A_3)=$$
$$=P(A_1)\big(1-P(A_2)\big)\big(1-P(A_3)\big)+\big(1-P(A_1)\big)P(A_2)\big(1-P(A_3)\big)+$$
$$+\big(1-P(A_1)\big)\big(1-P(A_2)\big)P(A_3)=0.6(1-0.7)(1-0.8)+$$
$$+(1-0.6)0.7(1-0.8)+(1-0.6)(1-0.7)0.8$$
$$=0.6\cdot0.3\cdot0.2+0.4\cdot0.7\cdot0.2+0.4\cdot0.3\cdot0.8=$$
$$=0.036+0.056+0.096=0.188$$

$$P(B_3) = P(B_0) = P(A_1A_2A_3) = P(A_1)P(A_2)P(A_3) = 0.6 \cdot 0.7 \cdot 0.8 = 0.336$$

Так как события B_0, B_1, B_2, B_3 несовместны и образуют полную группу событий, то сумма их вероятностей равна 1, поэтому:

$$P(B_2) = 1 - \left(P(B_0) + P(B_1) + P(B_3)\right) = 1 - (0.024 + 0.188 + 0.336)$$
$$= 1 - 0.548 = 0.452$$

Пусть событие C - самолет сбит. Заданы условные вероятности:

$$P(C|B_1) = 0.3; P(C|B_2) = 0.5; P(C|B_3) = 1$$

Очевидно, что $P(C|B_0) = 0$ (то есть если попаданий не было - самолет не может быть сбит)

Найдем вероятность того, что самолет сбит, по формуле полной вероятности:

$$P(C) = P(B_0)P(C|B_0) + P(B_1)P(C|B_1) + P(B_2)P(C|B_2) + P(B_3)P(C|B_3)$$

$$P(C) = 0.024 \cdot 0 + 0.188 \cdot 0.3 + 0.452 \cdot 0.5 + 0.336 \cdot 1 = 0.6184$$

Теперь переоценим вероятности гипотез при условии, что произошло событие C, по формуле Байеса:

$$P(B_1|C) = \frac{P(B_1)P(C|B_1)}{P(C)} = \frac{0.188 \cdot 0.3}{0.6184} = 0.0912$$

$$P(B_2|C) = \frac{P(B_2)P(C|B_2)}{P(C)} = \frac{0.452 \cdot 0.5}{0.6184} = 0.3655$$

$$P(B_3|C) = \frac{P(B_3)P(C|B_3)}{P(C)} = \frac{0.336 \cdot 1}{0.6184} = 0.5433$$

Очевидно, что $P(B_1|C) = 0$ (если самолет сбит, не может оказаться, что попаданий не было).

Итак, если самолет сбит, наиболее вероятное число попаданий - три.

Ответ. Вероятность того, что самолет сбит, 0.6184. Если самолет сбит, наиболее вероятное число попаданий - три.

Задача 35.

Самолет, вылетающий на задание создает радиопомехи, которые с вероятностью 0.3 "забивают" радиосредства системы ПВО. Если радиосредства "забиты", то самолет проходит к объекту необстрелянным, сбрасывает бомбы и поражает объект с вероятностью 0.9. Если радиосредства системы ПВО "не забиты", то самолет подвергается обстрелу и сбивается с вероятностью 0.6. Найти вероятность того, что объект будет разрушен.

Решение.

Обозначим события:

A - радиосредства ПВО "забиты", B - самолет поражает объект. Заданы вероятности:

$$P(A) = 0.3; P(B|A) = 0.9; P(\bar{B}|\bar{A}) = 0.6$$

Тогда $P(\bar{A}) = 1 - P(A) = 1 - 0.3 = 0.7; P(B|\bar{A}) = 1 - 0.6 = 0.4$. По формуле полной вероятности:

$$P(B) = P(A)P(B|A) + P(\bar{A})P(B|\bar{A}) = 0.3 \cdot 0.9 + 0.7 \cdot 0.4 = 0.27 + 0.28 = 0.55$$

Ответ. 0.55

Задача 63.

Стрельба с ЛА по ЛА может производиться с трех дальностей: 900, 600, и 300м. Вероятность того , что стрельба производится с соответствующей позиции пропорциональна дальности стрельбы. Вероятность попадания в ЛА с 900м – 0.5; с 600м – 0.6, с 300м – 0.8. После 2-х выстрелов пробоин в ЛА не обнаружено . Найти вероятность что стрельба велась с 900 м?

Решение.

Обозначим события

A_1 - стрельба велась с дальности 900 м, A_2 - 600 м, A_3 - 300 м. Обозначим вероятности:

$$p(A_i) = p_i$$

Тогда, согласно условию, вероятности p_i пропорциональны дальности стрельбы, то есть:

$$\frac{p_1}{900} = \frac{p_2}{600} = \frac{p_3}{300}$$

Из равенства $\frac{p_1}{900} = \frac{p_3}{300}$ получим $p_1 = 3p_3$, из равенства $\frac{p_2}{600} = \frac{p_3}{300}$ получим $p_2 = 2p_3$

Так как события A_1, A_2, A_3 несовместны и составляют полную группу событий, то $p_1 + p_2 + p_3 = 1$. Подставив в это равенство $p_1 = 3p_3, p_2 = 2p_3$, получим:

$$3p_3 + 2p_3 + p_3 = 1$$

$$p_3 = \frac{1}{6} \to p_2 = \frac{2}{6}; p_1 = \frac{3}{6}$$

Итак, $P(A_1) = \frac{13}{6}; P(A_2) = \frac{2}{6}; P(A_3) = \frac{31}{6}$.

Пусть событие B - два промаха при двух выстрелах.

При стрельбе с дальности 900м вероятность попадания при одном выстреле равна 0.5, то есть вероятность промаха $1-0.5=0.5$. Вероятность двух промахов равна $0.5\cdot 0.5=0.25$

При стрельбе с дальности 600м вероятность попадания при одном выстреле равна 0.6, то есть вероятность промаха $1-0.6=0.4$. Вероятность двух промахов равна $0.4\cdot 0.4=0.16$

При стрельбе с дальности 900м вероятность попадания при одном выстреле равна 0.8, то есть вероятность промаха $1-0.8=0.2$. Вероятность двух промахов равна $0.2\cdot 0.2=0.04$

Условные вероятности: $P(B|A_1)=0.25; P(B|A_2)=0.16; P(B|A_3)=0.04$.

Тогда, по формуле полной вероятности:

$$P(B)=P(A_1)\,P(B|A_1)+P(A_2)P(B|A_2)+P(A_3)P(B|A_3)=$$

$$=\frac{3}{6}\cdot 0.25+\frac{2}{6}\cdot 0.16+\frac{1}{6}\cdot 0.04=215$$

Теперь переоценим вероятность гипотезы A_1 по формуле Байеса:

$$P(A_1|B)=\frac{P(A_1)\,P(B|A_1)}{P(B)}=\frac{\frac{3}{6}\cdot 0.25}{0.215}\approx 0.5814$$

Ответ. ≈ 0.5814

Задача 93.

Сколько нужно купить лотерейных билетов, чтобы обеспечить вероятность хотя бы одного выигрыша не менее 0.5, если общее количество билетов равно 10000, из них выигрышных 200.

Решение.

Для каждого билета вероятность p того, что он выигрышный, $p = \frac{200}{10000} = 0.02$. Число испытаний (купленных лотерейных билетов) обозначим n.

Вероятность того, что в n испытаниях, в каждом из которых вероятность появления события равна p, событие появится ровно k раз находится по формуле Бернулли:

$$P_n(k) = C_n^k\, p^k\, (1-p)^{n-k}$$

События «есть хотя бы один выигрыш из n билетов» и «нет ни одного выигрыша из n билетов» противоположные, поэтому

$P(k \geq 1) = 1 - P(k = 0)$

Так как по условию, $P(k \geq 1) \geq 0.5$, то $1 - P(k = 0) \geq 0.5$, то есть $P(k = 0) \leq 0.5$

Запишем вероятность того, что среди n билетов будет $k = 0$ выигрышных:

$P(k = 0) = C_n^0 \cdot 0.02^0 \cdot 0.98^n = 0.98^n \leq 0.5$

Исходя из условия $0.98^n \leq 0.5$ подберем n

$n \geq \log_{0.98} 0.5 \approx 34.3$

Итак, чтобы обеспечить вероятность хотя бы одного выигрыша не менее 0.5, нужно купить не менее 35 билетов.

Ответ. не менее 35 билетов.

Задача 123.

Производится стрельба по точечной цели снарядом, зона разрушительного действия которого представляет собой круг радиуса r. Рассеивание точки попадания снаряда круговое нормальное с параметрами $m_x=m_y=0$, $\sigma_x=\sigma_y=2r$. Центр рассеивания совпадает с целью. Сколько выстрелов нужно произвести, чтобы разрушить цель с вероятностью 0.99?

Решение.

При круговом нормальном рассеивании точки попадания снаряда с заданными параметрами вероятность попадания в круг радиуса r для одного снаряда равна:

$$P=1-e^{-\frac{r^2}{2\sigma^2}}=1-e^{-\frac{r^2}{2(2r)^2}}=1-e^{-1/8}\approx 0.1175$$

Вероятность того, что в n испытаниях, в каждом из которых вероятность появления события равна p, событие появится ровно k раз находится по формуле Бернулли:

$$P_n(k)=C_n^k\,p^k\,(1-p)^{n-k}$$

Считаем, что цель разрушается от одного попадания. Пусть по цели произведено n выстрелов. События «цель разрушена за n выстрелов, то есть было хотя бы одно попадание» и «цель не разрушена за n выстрелов, то есть не было ни одного попадания» противоположны.

$$P(k\geq 1)=1-P(k=0)$$

Так как по условию, $P(k\geq 1)=0.99$, то $1-P(k=0)=0.01$, то есть $P(k=0)\leq 0.01$

Запишем вероятность того, что среди n выстрелов будет $k = 0$ попаданий:

$$P(k = 0) = C_n^0 \cdot 0.1175^0 \cdot (1 - 0.1175)^n = 0.8825^n = 0.01$$

$$0.8825^n = 0.01$$

$$n = \log_{0.8825} 0.01 \approx 36.84$$

Итак, чтобы с заданной вероятностью разрушить цель, нужно 37 выстрелов.

Ответ. 37 выстрелов