Контрольная работа по теории вероятностей

Задача 1.

Бросаются две игральные кости. Определить вероятность того, что: а) сумма числа очков не превосходит 5; б) произведение числа очков не превосходит 3; в) произведение числа очков делится на 4.

Решение.

Общее число исходов опыта при бросании двух костей $N = 6 \cdot 6 = 36$.

а) Пусть событие A – сумма числа очков не превосходит 5. Этому событию соответствуют исходы (1, 1), (1, 2), (1, 3), (1, 4), (2, 1), (2, 2), (2, 3), (3, 1), (3, 2), (4, 1), всего $M_A = 10$ исходов. Согласно классическому определению вероятности,

$$P(A) = \frac{M_A}{N} = \frac{10}{36}$$

б) Пусть событие B – произведение числа очков не превосходит 3. Этому событию соответствуют исходы (1, 1), (1, 2), (1, 3), (2, 1), (3, 1), всего $M_B = 5$ исходов. Согласно классическому определению вероятности,

$$P(B) = \frac{M_B}{N} = \frac{5}{36}$$

б) Пусть событие C – произведение числа очков делится на 4. Этому событию соответствуют исходы (1, 4), (2, 2), (2, 4), (2, 6), (3, 4), (4, 1), …, (4, 6), (5, 4), (6, 2), (6, 4), (6, 6), всего $M_C = 15$ исходов. Согласно классическому определению вероятности,

$$P(C) = \frac{M_C}{N} = \frac{15}{36}$$

Ответ.

а) $10/36$; б) $5/36$; в) $15/36$.

Задача 2.

На отдельных карточках написаны цифры от 1 до 12. Все карточки перемешиваются, после чего наугад берут пять из них и раскладывают в ряд друг за другом в порядке появления. Какова вероятность того, что при этом получится число 54321?

Решение.
Общее число возможных исходов опыта – число способов выбрать 5 карточек из 12 с учетом порядка выбора и без повторения, то есть число размещений из 12 по 5:

$$N = A_{12}^{5} = \frac{12!}{(12-5)!} = \frac{12!}{7!} = 8 \cdot 9 \cdot 10 \cdot 11 \cdot 12 = 95040$$

Благоприятный исход всего один (получено нужное число), $M = 1$. Согласно классическому определению вероятности,

$$P = \frac{M}{N} = \frac{1}{95040} \approx 0.000011$$

Ответ.
$\frac{1}{95040} \approx 0.000011$.

Задача 3.
В группе 15 мальчиков и 10 девочек. Для тестирования случайным образом отобраны 8 детей. Найти вероятность того, что: а) все они - мальчики; б) среди них 3 мальчика.

Решение.
Общее число исходов – число способов выбрать 8 детей из $10 + 15 = 25$ детей (без повторения и без учета порядка выбора), то есть число сочетаний из 25 по 8:

$$N = C_{25}^{8} = \frac{25!}{8!\,(25-8)!} = \frac{25!}{8!\,17!} = \frac{18 \cdot 19 \cdot \ldots \cdot 24 \cdot 24}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot 7 \cdot 8} = 1081575$$

а) Пусть событие A – выбраны 8 мальчиков. Число благоприятных исходов – это число способов выбрать 8 из 15 мальчиков:

$$M_A = C_{15}^{8} = \frac{15!}{8!\,7!} = \frac{9 \cdot 10 \cdot 11 \cdot 12 \cdot 13 \cdot 14 \cdot 15}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7} = 6435$$

$$P(A) = \frac{M_A}{N} = \frac{C_{15}^{8}}{C_{25}^{8}} = \frac{6435}{1081575} = \frac{13}{2185} \approx 0.0059$$

б) Пусть событие B – выбраны ровно 3 мальчика (тогда остальные 5 выбранных детей – девочки). Число благоприятных исходов – это число способов выбрать 3 из 15 мальчиков и 5 из 10 девочек:

$$M_B = C_{15}^3 \cdot C_{10}^5 = \frac{15!}{3!\,12!} \cdot \frac{10!}{5!\,5!} = \frac{13 \cdot 14 \cdot 15}{1 \cdot 2 \cdot 3} \cdot \frac{6 \cdot 7 \cdot 8 \cdot 9 \cdot 10}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5} = 455 \cdot 252 = 114660$$

$$P(B) = \frac{M_B}{N} = \frac{C_{15}^3 \cdot C_{10}^5}{C_{25}^8} = \frac{114660}{1081575} = \frac{2548}{24035} \approx 0.1060$$

Ответ.

а) $\frac{C_{15}^8}{C_{25}^8} = \frac{13}{2185} \approx 0.0059$; б) $\frac{C_{15}^3 \cdot C_{10}^5}{C_{25}^8} = \frac{2548}{24035} \approx 0.1060.$

Задача 4.

Рабочий обслуживает три станка. Вероятность того, что в течение часа станок не потребует внимания рабочего, равна для первого станка – 0.9; для второго – 0.8; для третьего – 0.85. Найти: а) вероятность того, что в течение некоторого часа ни один станок не потребует к себе внимания рабочего; б) вероятность того, что по крайней мере один из трёх станков не потребует к себе внимания рабочего в течение часа.

Решение.

Пусть событие A_i – в течение часа i-ый станок не потребует внимания рабочего, $i = 1, 2, 3$. События A_i независимы,

$$P(A_1) = 0.9, P(A_2) = 0.8, P(A_3) = 0.85.$$

а) Пусть событие B - в течение некоторого часа ни один станок не потребует к себе внимания рабочего, то есть $B = A_1 A_2 A_3$. Так как события A_1, A_2, A_3 независимы, то по теореме умножения вероятностей:

$$P(B) = P(A_1 A_2 A_3) = P(A_1) P(A_2) P(A_3) = 0.9 \cdot 0.8 \cdot 0.85 = 0.612$$

б) Пусть событие C – хотя бы один из трёх станков не потребует к себе внимания рабочего в течение часа, то есть $C = A_1 + A_2 + A_3$. Тогда противоположное событие

$$\bar{C} = \overline{A_1 + A_2 + A_3} = \bar{A}_1 \bar{A}_2 \bar{A}_3$$

$$P(\bar{C}) = P(\bar{A}_1\bar{A}_2\bar{A}_3) = P(\bar{A}_1)P(\bar{A}_2)P(\bar{A}_3) = \big(1 - P(A_1)\big)\big(1 - P(A_2)\big)\big(1 - P(A_3)\big) =$$

$$= (1 - 0.9) \cdot (1 - 0.8) \cdot (1 - 0.85) = 0.1 \cdot 0.2 \cdot 0.15 = 0.003$$

$$P(C) = 1 - P(\bar{C}) = 1 - 0.003 = 0.997$$

Ответ. а) 0.612; б) 0.997.

Задача 5.

Вероятность того, что цель поражена при одном выстреле первым стрелком, равна 0.57, вторым – 0.72. Первый сделал 2, второй - 4 выстрела. Определить вероятность того что цель не поражена.

Решение.

Вероятность ровно двух промахов первого стрелка равна $(1 - 0.57) \cdot (1 - 0.57) = 0.43^2$. Вероятность ровно четырех промахов второго стрелка равна $(1 - 0.72)^4 = 0.28^4$. Вероятность того, что цель не поражена, то есть вероятность двух промахов первого стрелка и четырех промахов второго стрелка, по теореме умножения вероятностей равна

$$P = 0.43^2 \cdot 0.28^4 \approx 0.0011$$

Ответ. $0.43^2 \cdot 0.28^4 \approx 0.0011$.

Задача 6.

Рыбак имеет три места для ловли рыбы, которое он посещает с равной вероятностью каждое. Если он закидывает удочку на первом месте, рыба клюёт с вероятностью 0.4, на втором месте – 0.35; на третьем – 0.45. Рыбак вышел на рыбалку. Какова вероятность того, что рыба клюнула? Известно, что рыбак, выйдя на ловлю рыбы, закинул удочку, и рыба клюнула. Найти вероятность того, что он удил рыбу: а) на первом месте; б) на втором месте; в) на третьем месте.

Решение.

Пусть событие H_1 – рыбак удил на первом месте, H_2 – на втором, H_3 – на третьем, A – на выбранном месте рыба клюнула. События H_1, H_2, H_3 несовместны и образуют полную группу событий, из условия,

$$P(H_1) = P(H_2) = P(H_3) = \frac{1}{3}$$

Условные вероятности клева заданы:

$$P(A|H_1) = 0.4; P(A|H_2) = 0.35; P(A|H_3) = 0.45$$

Найдем вероятность клева по формуле полной вероятности:

$$P(A) = P(H_1)P(A|H_1) + P(H_2)P(A|H_2) + P(H_3)P(A|H_3) =$$

$$= \frac{1}{3}\cdot 0.4 + \frac{1}{3}\cdot 0.35 + \frac{1}{3}\cdot 0.45 = 0.4$$

Теперь, зная, что рыба клюнула (наступило событие A), переоценим вероятность выбора каждого из мест (гипотез H_i) по формуле Байеса:

$$P(H_1|A) = \frac{P(H_1)P(A|H_1)}{P(A)} = \frac{\frac{1}{3}\cdot 0.4}{0.4} = \frac{1}{3}$$

$$P(H_2|A) = \frac{P(H_2)P(A|H_2)}{P(A)} = \frac{\frac{1}{3}\cdot 0.35}{0.4} = \frac{1}{3}\cdot\frac{35}{40} = \frac{7}{24}$$

$$P(H_3|A) = \frac{P(H_3)P(A|H_3)}{P(A)} = \frac{\frac{1}{3}\cdot 0.45}{0.4} = \frac{1}{3}\cdot\frac{45}{40} = \frac{3}{8}$$

Ответ.

0.4; а) $\frac{8}{24}$; б) $\frac{7}{24}$; в) $\frac{9}{24}$.

Задача 7.

В библиотеку университета поступила партия учебной литературы, 30% которой составляет литература по гуманитарным дисциплинам, остальные - по естественным. Найти вероятность того, что: а) среди 9 книг данной партии 4 окажется по естественным; б) среди 8 книг окажется от 4 до 7 книг по гуманитарным; в) из 25 книг окажется 10 по естественным; г) среди 200 книг окажется от 60 до 100 учебников по гуманитарным дисциплинам.

Решение.

Вероятность того, что в серии из n независимых опытов, в каждом из которых событие наступает с вероятностью p, событие наступит ровно k раз, находится по формуле Бернулли:

$$P_n(k) = C_n^k \cdot p^k \cdot (1-p)^{n-k}$$

а) Имеем $n = 9$ книг, для каждой из которых вероятность оказаться книгой по естественным дисциплинам равна $p = 1 - 0.3 = 0.7$. Вероятность того, что ровно $k = 4$ книги будут по естественным дисциплинам:

$$P_9(4) = C_9^4 \cdot 0.3^4 \cdot 0.7^5 = \frac{9!}{4!\,5!} \cdot 0.3^4 \cdot 0.7^5 = \frac{6 \cdot 7 \cdot 8 \cdot 9}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} \cdot 0.3^4 \cdot 0.7^5$$
$$= 126 \cdot 0.3^4 \cdot 0.7^5 \approx 0.1715$$

б) Имеем $n = 8$ книг, вероятность оказаться книгой по гуманитарным дисциплинам равна $p = 0.3$. Вероятность $4 \le k \le 7$ книг по гуманитарным дисциплинам:

$$P_8(4 \le k \le 7) = P_8(4) + P_8(5) + P_8(6) + P_8(7) =$$

$$= \frac{8!}{4!\,4!} \cdot 0.3^4 \cdot 0.7^4 + \frac{8!}{5!\,3!} \cdot 0.3^5 \cdot 0.7^3 + \frac{8!}{6!\,2!} \cdot 0.3^6 \cdot 0.7^2 + \frac{8!}{7!\,1!} \cdot 0.3^7 \cdot 0.7^1 =$$

$$= \frac{5 \cdot 6 \cdot 7 \cdot 8}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} \cdot 0.3^4 \cdot 0.7^4 + \frac{6 \cdot 7 \cdot 8}{1 \cdot 2 \cdot 3} \cdot 0.3^5 \cdot 0.7^3 + \frac{7 \cdot 8}{2} \cdot 0.3^6 \cdot 0.7^2 + 8 \cdot 0.3^7 \cdot 0.7^1 =$$

$$= 70 \cdot 0.3^4 \cdot 0.7^4 + 56 \cdot 0.3^5 \cdot 0.7^3 + 28 \cdot 0.3^6 \cdot 0.7^2 + 8 \cdot 0.3^7 \cdot 0.7^1 \approx 0.1940$$

в) Используем локальную теорему Муавра-Лапласа.

Вероятность того, что в серии из n независимых опытов, в каждом из которых событие наступает с вероятностью p, событие наступит ровно k раз, приближенно равна

$$P_n(k) \approx \frac{1}{\sqrt{npq}} \varphi\left(\frac{k-np}{\sqrt{npq}}\right), \qquad \varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-x^2/2}$$

Значения $\varphi(x)$ находятся из таблиц (функция четная).

Имеем $n = 25$ книг, для каждой из которых вероятность оказаться книгой по естественным дисциплинам равна $p = 1 - 0.3 = 0.7$. Вероятность того, что ровно $k = 10$ книги будут по естественным дисциплинам:

$$P_{25}(10) \approx \frac{1}{\sqrt{25 \cdot 0.7 \cdot 0.3}} \varphi\left(\frac{10 - 25 \cdot 0.7}{\sqrt{25 \cdot 0.7 \cdot 0.3}}\right) \approx 0.436436\varphi(-3.27) \approx 0.436436 \cdot 0.0019 \approx 0.0008$$

г) Используем интегральную теорему Муавра-Лапласа.

Вероятность того, что в серии из n независимых испытаний, в каждом из которых событие происходит с вероятностью p, событие произойдет от k_1 до k_2 раз, приближенно равна:

$$P_n(k_1; k_2) \approx \Phi\left(\frac{k_2 - np}{\sqrt{npq}}\right) - \Phi\left(\frac{k_1 - np}{\sqrt{npq}}\right),$$

где $\Phi(x)$ - функция Лапласа:

$$\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^x e^{-z^2/2} dz$$

Имеем $n = 200$ книг, вероятность оказаться книгой по гуманитарным дисциплинам равна $p = 0.3$. Вероятность от $k_1 = 60$ до $k_2 = 100$ книг по гуманитарным дисциплинам:

$$P_{200}(60; 100) \approx \Phi\left(\frac{100 - 200 \cdot 0.3}{\sqrt{200 \cdot 0.3 \cdot 0.7}}\right) - \Phi\left(\frac{60 - 200 \cdot 0.3}{\sqrt{200 \cdot 0.3 \cdot 0.7}}\right) \approx \Phi(6.17) - \Phi(0) \approx 0.5 - 0 = 0.5$$

Ответ.
а) ≈ 0.1715; б) ≈ 0.1940; в) ≈ 0.0008; г) ≈ 0.5.

Задача 8.
Выбиваемые двумя стрелками числа очков характеризуются следующими законами распределения для первого стрелка:

X	4	5	6	7
p	0.25	0.15	0.3	0.3

и для второго стрелка:

Y	2	4	6
p	0.3	0.5	0.2

Стрелки делают по одному выстрелу. Подсчитывается сумма выбитых ими очков.

1) Составить закон распределения этой случайной величины.

2) Проверить равенства $M(X+Y)=M(X)+M(Y)$ и $D(X+Y)=D(X)+D(Y)$.

Решение.

1) Составим закон распределения случайной величин $Z=X+Y$.

Так как величины X и Y независимы, то $P\left(X=x_i, Y=y_j\right)=P(X=x_i)P\left(Y=y_j\right)$. Рассмотрим все возможные пары (X,Y) и соответствующие значения Z в таблице:

X	Y		
	2	4	6
4	$Z=6$ $p=0.25\cdot0.3=0.075$	$Z=8$ $p=0.25\cdot0.5=0.125$	$Z=10$ $p=0.25\cdot0.2=0.05$
5	$Z=7$ $p=0.15\cdot0.3=0.045$	$Z=9$ $p=0.15\cdot0.5=0.075$	$Z=11$ $p=0.15\cdot0.2=0.03$
6	$Z=8$ $p=0.3\cdot0.3=0.09$	$Z=10$ $p=0.3\cdot0.5=0.15$	$Z=12$ $p=0.3\cdot0.2=0.06$
7	$Z=9$ $p=0.3\cdot0.3=0.09$	$Z=11$ $p=0.3\cdot0.5=0.15$	$Z=13$ $p=0.3\cdot0.2=0.06$

Итак,

$$P(Z=6)=0.075; P(Z=7)=0.045; P(Z=8)=0.125+0.09=0.215;$$

$$P(Z=9)=0.075+0.09=0.165; P(Z=10)=0.05+0.15=0.2;$$

$$P(Z=11)=0.03+0.15=0.18; P(Z=12)=0.06; P(Z=13)=0.06.$$

Z	6	7	8	9	10	11	12	13
p	0.075	0.045	0.215	0.165	0.2	0.18	0.06	0.06

Проверим:

$$0.075+0.045+0.215+0.165+0.2+0.18+0.06+0.06=1$$

2) Проверим равенства $M(X+Y) = M(X) + M(Y)$ и $D(X+Y) = D(X) + D(Y)$.

$$M(X+Y) = M(Z) = \sum z_i p_i$$
$$= 6 \cdot 0.075 + 7 \cdot 0.045 + 8 \cdot 0.215 + 9 \cdot 0.165 + 10 \cdot 0.2 + 11 \cdot 0.18 +$$
$$+12 \cdot 0.06 + 13 \cdot 0.06 = 9.45$$

$$D(X+Y) = D(Z) = \sum z_i^2 p_i - M^2(Z)$$
$$= 6^2 \cdot 0.075 + 7^2 \cdot 0.045 + 8^2 \cdot 0.215 + 9^2 \cdot 0.165 +$$
$$+10^2 \cdot 0.2 + 11^2 \cdot 0.18 + 12^2 \cdot 0.06 + 13^2 \cdot 0.06 - 9.45^2 = 3.2875$$

Найдем математические ожидания и дисперсии X и Y:

$$M(X) = 4 \cdot 0.25 + 5 \cdot 0.15 + 6 \cdot 0.3 + 7 \cdot 0.3 = 5.65$$
$$D(X) = 4^2 \cdot 0.25 + 5^2 \cdot 0.15 + 6^2 \cdot 0.3 + 7^2 \cdot 0.3 - 5.65^2 = 1.3275$$
$$M(Y) = 2 \cdot 0.3 + 4 \cdot 0.5 + 6 \cdot 0.2 = 3.8$$
$$D(Y) = 2^2 \cdot 0.3 + 4^2 \cdot 0.5 + 6^2 \cdot 0.2 - 3.8^2 = 1.96$$

Проверим:

$$M(X) + M(Y) = 5.65 + 3.8 = 9.45 = M(X+Y)$$
$$D(X) + D(Y) = 1.3275 + 1.96 = 3.2875 = D(X+Y)$$

Ответ.

Z	6	7	8	9	10	11	12	13
p	0.075	0.045	0.215	0.165	0.2	0.18	0.06	0.06

$M(X) + M(Y) = 5.65 + 3.8 = 9.45 = M(X+Y)$;

$D(X) + D(Y) = 1.3275 + 1.96 = 3.2875 = D(X+Y)$.

Задача 9.

Случайная величина задана функцией распределения

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x \le 2 \\ (x-2)^2, & 2 < x \le 3 \\ 1, & x > 3 \end{cases}$$

Найти: а) плотность распределения $f(x)$; б) $M(X)$ и $D(X)$; в) построить графики $F(x)$ и $f(x)$.

Решение.

а) Найдем плотность распределения $f(x) = F'(x)$.

$$\left((x-2)^2\right)' = 2(x-2)$$

$$f(x) = \begin{cases} 2(x-2), & x \in [2;3] \\ 0, & x \notin [2;3] \end{cases}$$

б) Найдем $M(X)$ и $D(X)$:

$$M(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) \cdot x dx = \int_2^3 2(x-2) \cdot x dx = 2\int_2^3 (x^2 - 2x) dx$$

$$= 2\left(\frac{x^3}{3} - x^2\right)\Bigg|_2^3 =$$

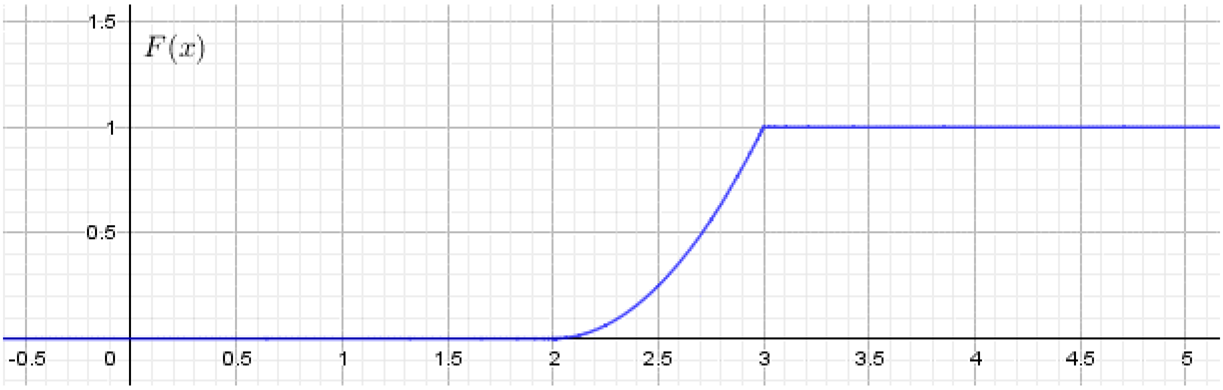
$$= 2\left(\frac{27}{3} - 9 - \frac{8}{3} + 4\right) = \frac{8}{3}$$

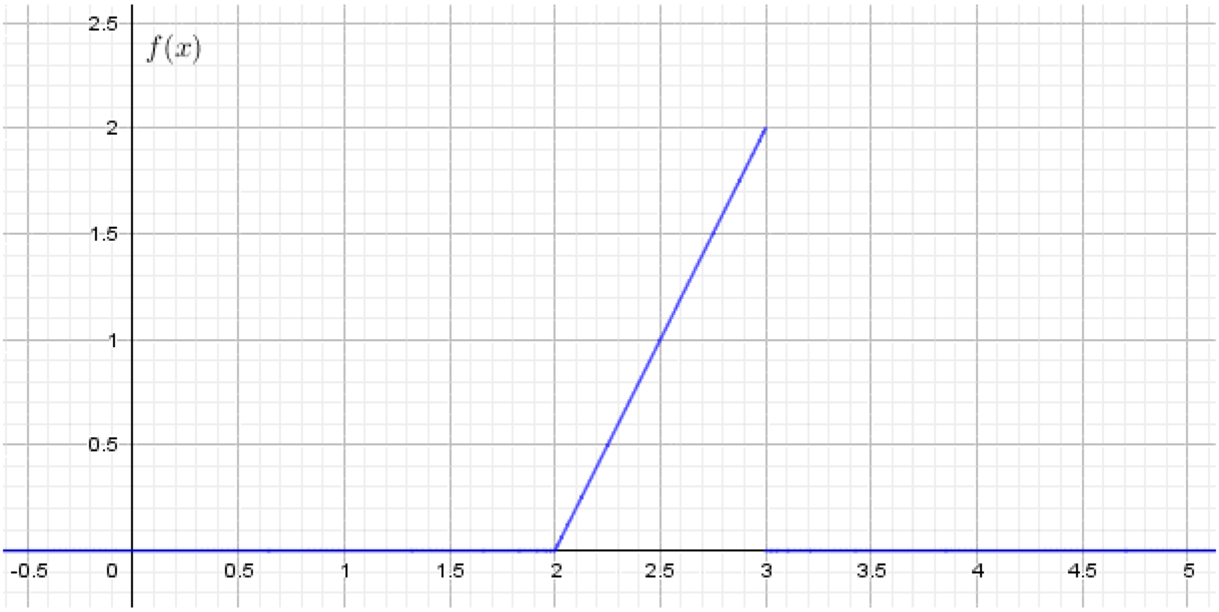
$$D(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) \cdot x^2 dx - M^2(X) = \int_2^3 2(x-2) \cdot x^2 dx - \left(\frac{8}{3}\right)^2$$

$$= 2\int_2^3 (x^3 - 2x^2) dx - \frac{64}{9} =$$

$$= 2\left(\frac{x^4}{4} - \frac{2x^3}{3}\right)\Bigg|_2^3 - \frac{64}{9} = 2\left(\frac{81}{4} - \frac{2}{3} \cdot 27 - \frac{16}{4} + \frac{16}{3}\right) - \frac{64}{9} = \frac{43}{6} - \frac{64}{9} = \frac{1}{18}$$

в) Построим графики $F(x)$ и $f(x)$.





Ответ.

а) $f(x)=\begin{cases}2(x-2), & x\in[2;3]\\ 0, & x\notin[2;3]\end{cases}$; б) $M(X)=\dfrac{8}{3}; D(X)=\dfrac{1}{18}$.

Задача 10.

Случайная величина задана плотностью распределения

$$f(x)=\begin{cases}0, & x<0\\ a, & 0\le x\le 5\\ 0, & x>5\end{cases}$$

Требуется: а) определить коэффициент a; б) найти функцию распределения $F(x)$; в) найти вероятность попадания случайной величины на участок $(1;4]$; г) построить графики $F(x)$ и $f(x)$.

Решение.

а) Найдем параметр a из условия нормировки:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = \int_{0}^{5} a dx = ax\Big|_0^5 = 5a = 1$$

$$a = \frac{1}{5}$$

б) Найдем функцию распределения $F(x)$:

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)dt = \begin{cases} \int_{-\infty}^{x} 0dt, & x \le 0 \\ \int_{-\infty}^{0} 0dt + \int_{0}^{x} \frac{1}{5}dt, & 0 < x \le 5 \\ \int_{-\infty}^{0} 0dt + \int_{0}^{5} \frac{1}{5}dt + \int_{5}^{x} 0dt, & x > 5 \end{cases}$$

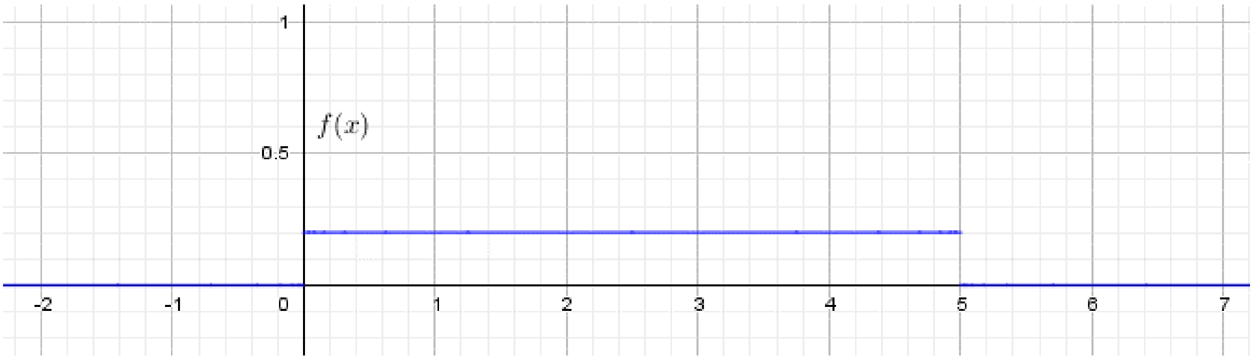
$$\int_0^x \frac{1}{5}dt = \frac{1}{5}t\Big|_0^x = \frac{1}{5}x; \ \int_0^5 \frac{1}{5}dt = \frac{1}{5}\cdot 5 = 1$$

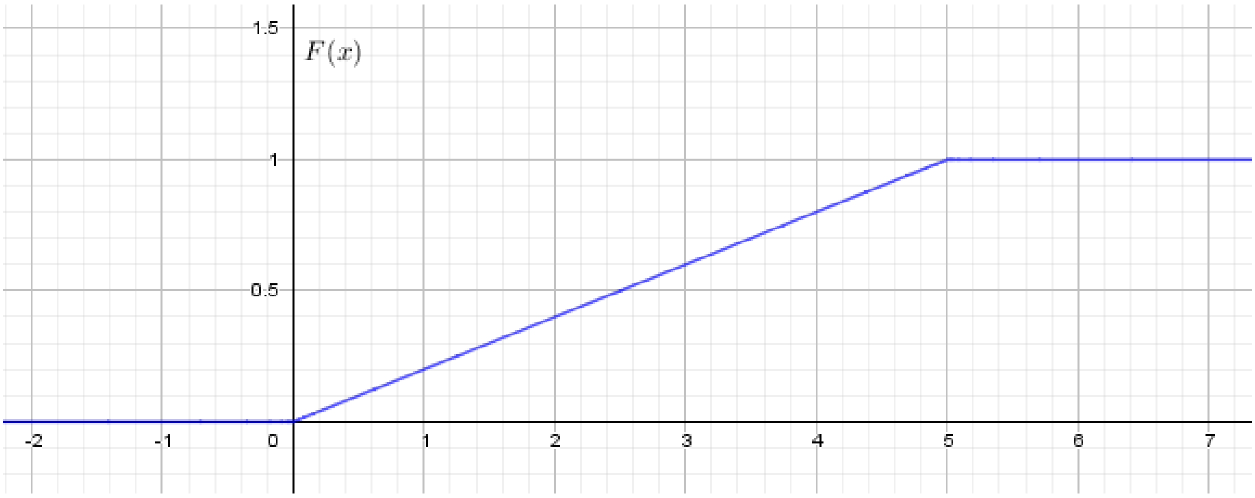
$$F(x) = \begin{cases} 0, & x \le 0 \\ \frac{x}{5}, & 0 < x \le 5 \\ 1, & x > 5 \end{cases}$$

в) Найдем вероятность попадания случайной величины на участок $(1;4]$:

$$P(1 < X \le 4) = F(4) - F(1) = \frac{4}{5} - \frac{1}{5} = \frac{3}{5}$$

г) Построим графики $F(x)$ и $f(x)$.





Ответ.

а) $a=\frac{1}{5}$; б) $F(x)=\begin{cases}0, & x\le 0\\ \frac{x}{5}, & 0<x\le 5\\ 1, & x>5\end{cases}$; в) $P(1<X\le 4)=\frac{3}{5}$.

Задача 11.

Результаты измерения расстояния между населёнными пунктами подчинены нормальному закону с параметрами $M(X)=16$ км, $\sigma(X)=100$ м. Найти вероятность того, что расстояние между этими пунктами: а) не меньше 15.8 км; б) находится в интервале $(15.8; 16.4)$.

Решение.

Для нормального распределения с параметрами m и σ:

$$P(a<X<b)=\Phi\left(\frac{b-m}{\sigma}\right)-\Phi\left(\frac{a-m}{\sigma}\right),$$

$$P(X<b)=\Phi\left(\frac{b-m}{\sigma}\right)+\frac{1}{2},$$

где $\Phi(x)$ - функция Лапласа:

$$\Phi(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_0^x e^{-z^2/2}dz$$

В заданном случае $m=16$ км, $\sigma=100$ м $=0.1$ км.

а) Вероятность того, что расстояние между населенными пунктами не меньше 15.8 км:

$$P(X \leq 15.8) = \Phi\left(\frac{15.8-16}{0.1}\right) + \frac{1}{2} = \Phi(-2) + 0.5 = 0.5 - \Phi(2)$$
$$\approx 0.5 - 0.4772 = 0.0228$$

а) Вероятность того, что расстояние между населенными пунктами находится в интервале $(15.8; 16.4)$:

$$P(15.8 < X < 16.4) = \Phi\left(\frac{16.4-16}{0.1}\right) - \Phi\left(\frac{15.8-16}{0.1}\right) = \Phi(4) - \Phi(-2)$$
$$= \Phi(4) + \Phi(2) \approx$$

$$\approx 0.499968 + 0.4772 \approx 0.9772$$

Ответ.
а) ≈ 0.0228; б) ≈ 0.9772.

Задача 12.

Найти математическое ожидание, дисперсию и среднее квадратическое отклонение (по формулам и непосредственно по определению) случайной величины, распределённой равномерно в интервале $[2; 7]$.

Решение.
Для равномерного на отрезке $[a; b]$ распределения:

$$M(X) = \frac{a+b}{2}; D(X) = \frac{(b-a)^2}{12}$$

Для заданной величины, распределенной равномерно на отрезке $[2; 7]$:

$$M(X) = \frac{2+7}{2} = \frac{9}{2}; D(X) = \frac{(7-2)^2}{12} = \frac{25}{12}$$

$$\sigma(X) = \sqrt{D(X)} = \sqrt{\frac{25}{12}} = \frac{5\sqrt{3}}{6}$$

Плотность равномерного распределения:

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{b-a}, & x\in[a;b]\\ 0, & x\notin[a;b]\end{cases},$$

поэтому заданной величины:

$$f(x)=\begin{cases}1/5, & x\in[2;7]\\ 0, & x\notin[2;7]\end{cases}$$

Найдем математическое ожидание и дисперсию непосредственно:

$$M(X)=\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\cdot x dx=\int_2^7 \frac{1}{5}x dx=\frac{1}{10}x^2\Big|_2^7=\frac{49-4}{10}=\frac{45}{10}=\frac{9}{2}$$

$$D(X)=\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\cdot x^2 dx-M^2(X)=\int_2^7\frac{1}{5}x^2dx-\left(\frac{9}{2}\right)^2=\frac{x^3}{15}\Big|_2^7-\frac{81}{4}$$
$$=\frac{343-8}{15}-\frac{81}{4}=$$
$$=\frac{335}{15}-\frac{81}{4}=\frac{67}{3}-\frac{81}{4}=\frac{25}{12}$$

Результаты совпали.

Ответ.

$M(X)=\dfrac{9}{2}; D(X)=\dfrac{25}{12};\ \sigma(X)=\dfrac{5\sqrt{3}}{6}.$