Задача 1.
В партии из 16 изделий 6 изделий имеют скрытый дефект. Какова вероятность того, что из взятых наугад 5 изделий 3 изделия являются дефектными?

Решение.
Общее число возможных исходов опыта при выборе 5 изделий из 16 (без повторения, без учета порядка выбора) – это число сочетаний из 16 по 5:

$$N = C_{16}^{5} = \frac{16!}{5!\,11!} = \frac{12\cdot 13\cdot 14\cdot 15\cdot 16}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5} = 4368$$

Число исходов, благоприятных заданному событию, это число способов выбрать 3 изделия из 6 дефектных и еще $5-3=2$ изделия из $16-6=10$ изделий без дефекта:

$$M = C_{6}^{3}\cdot C_{10}^{2} = \frac{6!}{3!\,3!}\cdot\frac{10!}{2!\,8!} = \frac{4\cdot 5\cdot 6}{1\cdot 2\cdot 3}\cdot\frac{9\cdot 10}{1\cdot 2} = 20\cdot 45 = 900$$

Согласно классическому определению вероятности, искомая вероятность равна

$$P = \frac{M}{N} = \frac{C_{6}^{3}\cdot C_{10}^{2}}{C_{16}^{5}} = \frac{900}{4368} = \frac{75}{364} \approx 0.2060$$

Ответ. $75/364 \approx 0.2060$.

Задача 2.
В магазине выставлены для продажи 17 изделий, среди которых 6 изделий некачественные. Какова вероятность того, что взятые случайным образом 3 изделия будут некачественными?

Решение.
Общее число возможных исходов опыта при выборе 3 изделий из 17 (без повторения, без учета порядка выбора) – это число сочетаний из 17 по 3:

$$N = C_{17}^{3} = \frac{17!}{3!\,14!} = \frac{15\cdot 16\cdot 17}{1\cdot 2\cdot 3} = 680$$

Число исходов, благоприятных заданному событию, это число способов выбрать 3 изделия из 6 некачественных:

$$M = C_6^3 = \frac{6!}{3!\,3!} = \frac{4\cdot 5\cdot 6}{1\cdot 2\cdot 3} = 20$$

Согласно классическому определению вероятности, искомая вероятность равна

$$P = \frac{M}{N} = \frac{C_6^3}{C_{17}^3} = \frac{20}{680} = \frac{1}{34} \approx 0.0294$$

Ответ. $1/34 \approx 0.0294$.

Задача 3.

На сборочное предприятие поступили однотипные комплектующие с трёх заводов в количестве: 15 с первого завода, 25 со второго, 20 с третьего. Вероятность качественного изготовления изделий на первом заводе 0.8, на втором 0.7, на третьем 0.9. Какова вероятность того, что взятое случайным образом изделие будет качественным?

Решение.

Пусть событие H_1 – взятое случайным образом изделие поступило с первого завода, H_2 – со второго, H_3 – с третьего, A – взятое случайным образом изделие качественное. События H_1, H_2, H_3 несовместны и образуют полную группу событий. Согласно классическому определению вероятности,

$$P(H_1) = \frac{15}{15+25+20} = \frac{15}{60} = \frac{1}{4} = \frac{3}{12}; P(H_2) = \frac{25}{60} = \frac{5}{12}; P(H_3) = \frac{20}{60} = \frac{1}{3} = \frac{4}{12}$$

Условные вероятности получения качественного изделия заданы:

$$P(A|H_1) = 0.8, P(A|H_2) = 0.7, P(A|H_3) = 0.9.$$

По формуле полной вероятности:

$$P(A) = P(H_1)P(A|H_1) + P(H_2)P(A|H_2) + P(H_3)P(A|H_3) =$$

$$= \frac{3}{12}\cdot 0.8 + \frac{5}{12}\cdot 0.7 + \frac{4}{12}\cdot 0.9 = \frac{9.5}{12} = \frac{95}{120} = \frac{19}{24} \approx 0.7917$$

Ответ. $19/24 \approx 0.7917$.

Задача 4.

Дано распределение дискретной случайное величины X. Найти математическое ожидание и среднее квадратичное отклонение.

x_i	4	6	8	9
p_i	0.3	0.1	0.1	0.5

Решение.

Найдем математическое ожидание:

$$M(X) = \sum x_i p_i = 4 \cdot 0.3 + 6 \cdot 0.1 + 8 \cdot 0.1 + 9 \cdot 0.5 = 7.1$$

Найдем дисперсию и среднее квадратичное отклонение:

$$D(X) = \sum x_i^2 p_i - M^2(X) = 4^2 \cdot 0.3 + 6^2 \cdot 0.1 + 8^2 \cdot 0.1 + 9^2 \cdot 0.5 - 7.1^2 = 4.89$$

$$\sigma(X) = \sqrt{D(X)} = \sqrt{4.89} \approx 2.2113$$

Ответ.

$M(X) = 7.1;\ \sigma(X) \approx 2.2113.$

Задача 5.

В городе имеются 3 оптовые базы. Вероятность того, что требуемого сорта товар отсутствует на этих базах, одинакова и равна 0.24. Составить закон распределения числа баз, на которых искомый товар отсутствует в данный момент.

Решение.

Используем формулу Бернулли: вероятность того, что в серии из n независимых опытов, в каждом из которых событие наступает с вероятностью p, событие наступит ровно k раз, равна

$$P_n(k) = C_n^k \cdot p^k \cdot (1-p)^{n-k}$$

Имеем $n = 3$ базы, вероятность отсутствия товара на каждой $p = 0.24$. Вероятность того, что товар отсутствует на $X = k$ базах:

$$P(X = k) = P_3(k) = C_3^k \cdot 0.24^k \cdot (1 - 0.24)^{3-k} = \frac{3!}{k!\,(3-k)!} \cdot 0.24^k \cdot 0.76^{3-k},$$
$$k = 0, 1, 2, 3$$

Вычислим вероятности:

$$P(X = 0) = \frac{3!}{0!\,3!} \cdot 0.24^0 \cdot 0.76^3 = 0.76^3 = 0.438976$$

$$P(X = 1) = \frac{3!}{1!\,2!} \cdot 0.24^1 \cdot 0.76^2 = 3 \cdot 0.24 \cdot 0.76^2 = 0.415872$$

$$P(X = 2) = \frac{3!}{2!\,1!} \cdot 0.24^2 \cdot 0.76^1 = 3 \cdot 0.24^2 \cdot 0.76 = 0.131328$$

$$P(X = 3) = \frac{3!}{3!\,0!} \cdot 0.24^3 \cdot 0.76^0 = 0.24^3 = 0.013824$$

Итак, закон распределения X:

X	0	1	2	3
p	0.438976	0.415872	0.131328	0.013824

Проверим:

$$0.438976 + 0.415872 + 0.131328 + 0.013824 = 1$$

Ответ.

X	0	1	2	3
p	0.438976	0.415872	0.131328	0.013824

Задача 6.

Непрерывная случайная величина имеет нормальное распределение. Ее математическое ожидание равно $M_x = 38$, среднее квадратичное отклонение равно $\sigma_x = 2$. Найти вероятность того, что в результате испытания случайная величина примет значение в интервале $(35; 40)$.

Решение.

Для нормально распределенной случайной величины с параметрами M_x и σ_x:

$$P(a < X < b) = \Phi\left(\frac{b - M_x}{\sigma_x}\right) - \Phi\left(\frac{a - M_x}{\sigma_x}\right),$$

где $\Phi(z)$ – функция Лапласа:

$$\Phi(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^z e^{-t^2/2} dt.$$

Получим:

$$P(35 < X < 40) = \Phi\left(\frac{40 - 38}{2}\right) - \Phi\left(\frac{35 - 38}{2}\right) = \Phi(1) - \Phi(-1.5)$$
$$= \Phi(1) - \big(-\Phi(1.5)\big) =$$

$$= \Phi(1) + \Phi(1.5) \approx 0.3413 + 0.4332 = 0.7745$$

Ответ. ≈ 0.7745.

Задача 7.

Найти линейную среднюю квадратическую регрессию случайной величины Y на случайную величину X на основе заданного закона распределения двумерной случайной величины.

X	Y		
	1	4	6
3	0.14	0.12	0.13
7	0.13	0.2	0.28

Решение.

Искомое уравнение линейной среднеквадратической регрессии Y на X имеет вид:

$$\hat{y}_x = \frac{M(XY) - M(X)M(Y)}{D(X)}\big(x - M(X)\big) + M(Y)$$

Найдем $M(XY)$:

$$M(XY)=\sum x_i y_j p_{ij} = 3\cdot 1\cdot 0.14+3\cdot 4\cdot 0.12+3\cdot 6\cdot 0.13+7\cdot 1\cdot 0.13+7\cdot 4\cdot 0.2 + 7\cdot 6\cdot 0.28=22.47$$

Найдем распределение и числовые характеристики X:

$$P(X=3)=0.14+0.12+0.13=0.39;\ P(X=7)=0.13+0.2+0.28=0.61$$

$$M(X)=\sum x_i p_i = 3\cdot 0.39+7\cdot 0.61=5.44$$

$$D(X)=\sum x_i^2 p_i - M^2(X) = 3^2\cdot 0.39+7^2\cdot 0.61-5.44^2=3.8064$$

Найдем распределение и математическое ожидание Y:

$$P(Y=1)=0.14+0.13=0.24; P(Y=4)=0.12+0.2=0.32; P(Y=6) = 0.13+0.28=0.41$$

$$M(Y)=\sum y_j p_j = 1\cdot 0.24+4\cdot 0.32+6\cdot 0.41=3.98$$

Запишем искомое уравнение:

$$\hat{y}_x=\frac{22.47-5.44\cdot 3.98}{3.8064}(x-5.44)+3.98$$

$$\hat{y}_x=0.2151x+2.8098$$

Ответ.
$\hat{y}_x=0.2151x+2.8098.$