Контрольная работа по численным методам с решением

Решение задачи Коши численными методами

ЗАДАНИЕ

$$f(t,u)=\frac{du}{dt}=\frac{2tu^3}{1-t^2u^2},\quad t\in[2;\,2.5],\ u^0=1.$$

Решить задачу методом Эйлера, методом Адамса, методом Рунге-Кутта.

РЕШЕНИЕ

Метод Эйлера:

Шаг $h=\dfrac{2.5-2}{5}=0.1$.

Алгоритм решения: $\begin{cases} y_{n+1}=y_n+hf(t_n,y_n) \\ y_0=u^0=1 \end{cases}$.

Подставляем значения:

$$y_1=y_0+hf(t_0,y_0)=1+0.1\cdot\frac{2\cdot2\cdot1^3}{1-2^2\cdot1^2}\approx0.8667.$$

$$y_2=y_1+hf(t_1,y_1)=0.8667+0.1\cdot\frac{2\cdot2.1\cdot0.8667^3}{1-2.1^2\cdot0.8667^2}\approx0.7484.$$

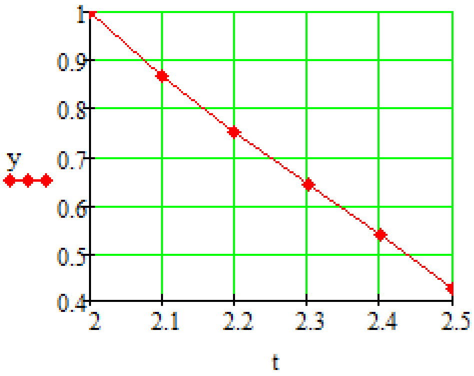
$$y_3=y_2+hf(t_2,y_2)=0.7484+0.1\cdot\frac{2\cdot2.2\cdot0.7484^3}{1-2.2^2\cdot0.7484^2}\approx0.6406.$$

$$y_4=y_3+hf(t_3,y_3)=0.6406+0.1\cdot\frac{2\cdot2.3\cdot0.6406^3}{1-2.3^2\cdot0.6406^2}\approx0.5374.$$

$$y_5=y_4+hf(t_4,y_4)=0.5374+0.1\cdot\frac{2\cdot2.4\cdot0.5374^3}{1-2.4^2\cdot0.5374^2}\approx0.4251.$$

Решение уравнения:

t	y
2	1
2.1	0.8667
2.2	0.7484
2.3	0.6406
2.4	0.5374
2.5	0.4251



Метод Рунге-Кутта: погрешность $\varepsilon = 0.01$

Разбиваем участок на 2 отрезка, тогда шаг $h = \dfrac{2.5-2}{2} = 0.25$.

Алгоритм решения: $\begin{cases} k_1 = f(t_n, y_n) \\ k_2 = f(t_n + h, y_n + hk_1) \\ y_{n+1} = y_n + 0.5 \cdot h \cdot k_1 + 0.5 \cdot h \cdot k_2 \end{cases}$.

1. $t_0 = 2$, $y_0 = 1$, $h = 0.25$.

$$k_1 = f(t_0, y_0) = \frac{2 \cdot 2 \cdot 1^3}{1 - 2^2 \cdot 1^2} \approx -1.3333,$$

$$k_2 = f(t_0 + h, y_0 + hk_1) = f(2.25, 0.6667) = \frac{2 \cdot 2.25 \cdot 0.6667^3}{1 - 2.25^2 \cdot 0.6667^2} \approx -1.0667,$$

$$y_1 = y_0 + 0.5 \cdot h \cdot k_1 + 0.5 \cdot h \cdot k_2 =$$
$$= 1 + 0.5 \cdot 0.25 \cdot (-1.3333) + 0.5 \cdot 0.25 \cdot (-1.0667) \approx 0.7.$$

2. $\dfrac{h}{2} = 0.125$

$k_1 = -1.3333$,

$$k_2 = f\left(t_0 + \frac{h}{2}, y_0 + \frac{h}{2} k_1\right) = f(2.125, 0.8333) = \frac{2 \cdot 2.125 \cdot 0.8333^3}{1 - 2.125^2 \cdot 0.8333^2} \approx -1.1515,$$

$$y_{12}^{h/2} = y_0 + 0.5 \cdot \frac{h}{2} \cdot k_1 + 0.5 \cdot \frac{h}{2} \cdot k_2 =$$
$$= 1 + 0.5 \cdot \frac{0.25}{2} \cdot (-1.3333) + 0.5 \cdot \frac{0.25}{2} \cdot (-1.1515) \approx 0.8447.$$

$$k_1 = f\left(t_0 + \frac{h}{2}, y_{12}^{h/2}\right) = f(2.125, 0.8447) = \frac{2\cdot 2.125\cdot 0.8447^3}{1-2.125^2\cdot 0.8447^2} \approx -1.1528,$$

$$k_2 = f\left(t_0 + h, y_{12}^{h/2} + \frac{h}{2}k_1\right) = f(2.25, 0.7006) = \frac{2\cdot 2.25\cdot 0.7006^3}{1-2.125^2\cdot 0.7006^2} \approx -1.0422,$$

$$y_1^{h/2} = y_{12}^{h/2} + 0.5\cdot\frac{h}{2}\cdot k_1 + 0.5\cdot\frac{h}{2}\cdot k_2 =$$

$$= 0.8447 + 0.5\cdot\frac{0.25}{2}\cdot(-1.1528) + 0.5\cdot\frac{0.25}{2}\cdot(-1.0422) \approx 0.7075.$$

Считаем погрешность:

$$\left|\frac{0.7075-0.7}{2^p-1}\right| = \left|\frac{0.7075-0.7}{4-1}\right| \approx 0.0025 < \varepsilon.$$

3. Следующий этап: полагаем $t_1 = 2.25$, $y_1 = 0.7075$, $h = 0.25$.

$$k_1 = f(t_1, y_1) = f(2.25, 0.7075) = \frac{2\cdot 2.25\cdot 0.7075^3}{1-2.25^2\cdot 0.7075^2} \approx -1.0388,$$

$$k_2 = f(t_1 + h, y_1 + hk_1) = f(2.5, 0.4478) = \frac{2\cdot 2.5\cdot 0.4478^3}{1-2.5^2\cdot 0.4478^2} \approx -1.7729,$$

$$y_2 = y_1 + 0.5\cdot h\cdot k_1 + 0.5\cdot h\cdot k_2 =$$

$$= 1 + 0.5\cdot 0.25\cdot(-1.0388) + 0.5\cdot 0.25\cdot(-1.7729) \approx 0.3998.$$

$$\frac{h}{2} = 0.125$$

$$k_1 = -1.0388,$$

$$k_2 = f\left(t_1 + \frac{h}{2}, y_1 + \frac{h}{2}k_1\right) = f(2.375, 0.5777) = \frac{2\cdot 2.375\cdot 0.5777^3}{1-2.375^2\cdot 0.5777^2} \approx -1.0379,$$

$$y_{12}^{h/2} = y_1 + 0.5\cdot\frac{h}{2}\cdot k_1 + 0.5\cdot\frac{h}{2}\cdot k_2 =$$

$$= 0.7075 + 0.5\cdot\frac{0.25}{2}\cdot(-1.0388) + 0.5\cdot\frac{0.25}{2}\cdot(-1.0379) \approx 0.5777.$$

Полагаем $t_n = 2.375$, $y_n = 0.5777$.

$$k_1 = f(t_n, y_n) = f(2.375, 0.5777) = \frac{2\cdot 2.375\cdot 0.5777^3}{1-2.375^2\cdot 0.5777^2} \approx -1.0377,$$

$$k_2 = f\left(t_n + \frac{h}{2}, y_n + \frac{h}{2}k_1\right) = f(2.5, 0.448) = \frac{2\cdot 2.5\cdot 0.448^3}{1-2.5^2\cdot 0.448^2} \approx -1.7677,$$

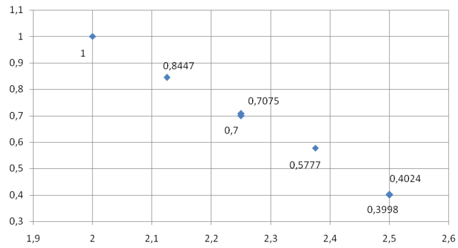
$$y_2^{h/2} = y_n + 0.5\cdot\frac{h}{2}\cdot k_1 + 0.5\cdot\frac{h}{2}\cdot k_2 =$$

$$= 0.5777 + 0.5\cdot\frac{0.25}{2}\cdot(-1.0377) + 0.5\cdot\frac{0.25}{2}\cdot(-1.7677) \approx 0.4024.$$

Считаем погрешность:

$$\left|\frac{0.4024-0.3998}{2^p-1}\right| = \left|\frac{0.4024-0.3998}{4-1}\right| \approx 0.0009 < \varepsilon.$$

Строим решение:



Метод Адамса:

Разбиваем участок на 4 отрезка, тогда шаг $h = \dfrac{2.5-2}{4} = 0.125$.

Алгоритм решения: $\underline{y_n = y_{n-1} + \dfrac{3}{2}\cdot h\cdot f_{n-1} - \dfrac{1}{2}\cdot h\cdot f_{n-2}}$.

n = 0 1 2 3 4

Для определения стартовых значений используем метод Рунге-Кутта 2-ого порядка. Значение y в точке 0,125 было найдено ранее:

$y_1 = y(2.125) = 0.8447$.

Из условия $y_0 = 1$.

$$f_0 = f(t_0, y_0) = f(2,1) = \frac{2\cdot 2\cdot 1^3}{1-2^2\cdot 1^2} \approx -1.3333,$$

$$f_1 = f(t_1, y_1) = f(2.125, 0.8447) = \frac{2\cdot 2\cdot 1^3}{1-2^2\cdot 1^2} \approx -1.1528,$$

$$y_2 = y_1 + \frac{3}{2} \cdot h \cdot f_1 - \frac{1}{2} \cdot h \cdot f_0 =$$

$$= 0.8447 + \frac{3}{2} \cdot 0.125 \cdot (-1.1528) - \frac{1}{2} \cdot 0.125 \cdot (-1.3333) \approx 0.7119,$$

$$f_2 = f(t_2, y_2) = f(2.25, 0.7119) = \frac{2 \cdot 2.25 \cdot 0.7119^3}{1 - 2.25^2 \cdot 0.7119^2} \approx -1.037,$$

$$y_3 = y_2 + \frac{3}{2} \cdot h \cdot f_2 - \frac{1}{2} \cdot h \cdot f_1 =$$

$$= 0.7119 + \frac{3}{2} \cdot 0.125 \cdot (-1.037) - \frac{1}{2} \cdot 0.125 \cdot (-1.1528) \approx 0.5895,$$

$$f_3 = f(t_3, y_3) = f(2.375, 0.5895) = \frac{2 \cdot 2.375 \cdot 0.5895^3}{1 - 2.375^2 \cdot 0.5895^2} \approx -1.0134,$$

$$y_4 = y_3 + \frac{3}{2} \cdot h \cdot f_3 - \frac{1}{2} \cdot h \cdot f_2 =$$

$$= 0.5895 + \frac{3}{2} \cdot 0.125 \cdot (-1.0134) - \frac{1}{2} \cdot 0.125 \cdot (-1.037) \approx 0.4643.$$

---

t	y
2	1
2.125	0.8447
2.25	0.7119
2.375	0.5895
2.5	0.4643