

Решение лабораторной работы Теория принятия решений

Задача 1

Проанализировать ситуацию с точки зрения критериев

1. Критерия Лапласа;
2. Максиминного (минимаксного) критерия;
3. Критерия Сэвиджа;
4. Критерия Гурвица.

Администрации театра нужно решить, сколько заказать программok для представлений. Стоимость заказа 200 ф. ст. плюс 30 пенсов за штуку. Программки продаются по 60 пенсов за штуку, и к тому же доход от рекламы составит дополнительные 300 ф.ст.

Из прошлого опыта известна посещаемость театра:

Посещаемость 4000 4500 5000 5500 6000

Ее вероятность 0,1 0,3 0,3 0,2 0,1

Ожидается, что 40% зрителей купят программки.

Решение.

Определяем множество допустимых вариантов количества программok.

Известны посещаемость и процент покупки программok, значит могут купить $4000 \cdot 0,4 = 1600$ программok, $4500 \cdot 0,4 = 1800$, 2000, 2200, 2400 программok.

Таким образом у администрации театра 5 стратегий.

Составляем матрицу сочетания стратегий администрации и посещаемости.

Количество посетителей	4000	4500	5000	5500	6000
Стратегии театра \ Количество покупателей программok	B1= 1600	B2= 1800	B3= 2000	B4= 2200	B5= 2400
A1=1600					
A2=1800					
A3=2000					
A4=2200					
A5=2400					

Далее рассчитываем ожидаемые прибыли по каждому варианту.

Формула прибыли: $60 * \text{проданное количество} + 300 - 200 - 30 * \text{закупленное количество}$
 $= 100 + 60 * \text{проданное количество} - 30 * \text{закупленное количество}$.

При этом проданное количество определяется как минимум из закупленного количества и количества потенциальных покупателей.

Стратегии театра \ Количество покупателей программок	B1= 1600	B2= 1800	B3= 2000	B4= 2200	B5= 2400
A1=1600	48100	60100	72100	84100	96100
A2=1800	42100	54100	66100	78100	90100
A3=2000	36100	48100	60100	72100	84100
A4=2200	30100	42100	54100	66100	78100
A5=2400	24100	36100	48100	60100	72100

Теперь решаем, какую стратегию закупок предпочтительнее выбрать.

Критерий Байеса.

По критерию Байеса за оптимальные принимается та стратегия (чистая) A_i , при которой максимизируется средний выигрыш a или минимизируется средний риск r .

Считаем значения $\sum(a_{ij}p_j)$

$$\sum(a_{1,j}p_j) = 48100 \cdot 0,1 + 48100 \cdot 0,3 + 48100 \cdot 0,3 + 48100 \cdot 0,2 + 48100 \cdot 0,1 = 48100$$

$$\sum(a_{2,j}p_j) = 42100 \cdot 0,1 + 54100 \cdot 0,3 + 54100 \cdot 0,3 + 54100 \cdot 0,2 + 54100 \cdot 0,1 = 52900$$

$$\sum(a_{3,j}p_j) = 36100 \cdot 0,1 + 48100 \cdot 0,3 + 60100 \cdot 0,3 + 60100 \cdot 0,2 + 60100 \cdot 0,1 = 54100$$

$$\sum(a_{4,j}p_j) = 30100 \cdot 0,1 + 42100 \cdot 0,3 + 54100 \cdot 0,3 + 66100 \cdot 0,2 + 66100 \cdot 0,1 = 51700$$

$$\sum(a_{5,j}p_j) = 24100 \cdot 0,1 + 36100 \cdot 0,3 + 48100 \cdot 0,3 + 60100 \cdot 0,2 + 72100 \cdot 0,1 = 46900$$

A_i	B_1	B_2	B_3	B_4	B_5	$\sum(a_{ij}p_j)$
A_1	4810	14430	14430	9620	4810	48100
A_2	4210	16230	16230	10820	5410	52900
A_3	3610	14430	18030	12020	6010	54100
A_4	3010	12630	16230	13220	6610	51700
A_5	2410	10830	14430	12020	7210	46900
p_j	0.1	0.3	0.3	0.2	0.1	

Выбираем из (48100; 52900; 54100; 51700; 46900) максимальный элемент
 $\max=54100$.

Вывод: выбираем стратегию 3.

Критерий Лапласа.

Если вероятности состояний природы правдоподобны, для их оценки используют принцип недостаточного основания Лапласа, согласно которого все состояния природы полагаются равновероятными, т.е.:

$$q_1 = q_2 = \dots = q_n = 1/n.$$

$$q_i = 1/5.$$

A_i	B_1	B_2	B_3	B_4	B_5	$\sum(a_{ij})$
A_1	9620	9620	9620	9620	9620	48100

Лабораторная работа по ТПР выполнена на сайте www.matburo.ru
 Переходите на сайт, смотрите больше примеров или закажите свою работу
 ©МатБюро. Решение задач по математике, экономике, программированию

A ₂	8420	10820	10820	10820	10820	51700
A ₃	7220	9620	12020	12020	12020	52900
A ₄	6020	8420	10820	13220	13220	51700
A ₅	4820	7220	9620	12020	14420	48100
p _j	0.2	0.2	0.2	0.2	0.2	

Выбираем из (48100; 51700; 52900; 51700; 48100) максимальный элемент
 max=52900

Вывод: выбираем стратегию 3.

Критерий Вальда.

По критерию Вальда за оптимальную принимается чистая стратегия, которая в наихудших условиях гарантирует максимальный выигрыш, т.е.

$$a = \max(\min a_{ij})$$

A _i	B ₁	B ₂	B ₃	B ₄	B ₅	min(a _{ij})
A ₁	48100	48100	48100	48100	48100	48100
A ₂	42100	54100	54100	54100	54100	42100
A ₃	36100	48100	60100	60100	60100	36100
A ₄	30100	42100	54100	66100	66100	30100
A ₅	24100	36100	48100	60100	72100	24100

Выбираем из (48100; 42100; 36100; 30100; 24100) максимальный элемент
 max=48100

Вывод: выбираем стратегию 1.

Критерий Севиджа.

Критерий минимального риска Севиджа рекомендует выбирать в качестве оптимальной стратегии ту, при которой величина максимального риска минимизируется в наихудших условиях, т.е. обеспечивается:

$$a = \min(\max r_{ij})$$

Критерий Сэвиджа ориентирует статистику на самые неблагоприятные состояния природы, т.е. этот критерий выражает пессимистическую оценку ситуации.

Находим матрицу рисков.

Риск – мера несоответствия между разными возможными результатами принятия определенных стратегий. Максимальный выигрыш в j-м столбце $b_j = \max(a_{ij})$ характеризует благоприятность состояния природы.

1. Рассчитываем 1-й столбец матрицы рисков.

$$r_{11} = 48100 - 48100 = 0; r_{21} = 48100 - 42100 = 6000; r_{31} = 48100 - 36100 = 12000; r_{41} = 48100 - 30100 = 18000; r_{51} = 48100 - 24100 = 24000;$$

2. Рассчитываем 2-й столбец матрицы рисков.

$$r_{12} = 54100 - 48100 = 6000; r_{22} = 54100 - 54100 = 0; r_{32} = 54100 - 48100 = 6000; r_{42} = 54100 - 42100 = 12000; r_{52} = 54100 - 36100 = 18000;$$

3. Рассчитываем 3-й столбец матрицы рисков.

$$r_{13} = 60100 - 48100 = 12000; r_{23} = 60100 - 54100 = 6000; r_{33} = 60100 - 60100 = 0; r_{43} = 60100 - 54100 = 6000; r_{53} = 60100 - 48100 = 12000;$$

4. Рассчитываем 4-й столбец матрицы рисков.

$$r_{14} = 66100 - 48100 = 18000; r_{24} = 66100 - 54100 = 12000; r_{34} = 66100 - 60100 = 6000; r_{44} = 66100 - 66100 = 0; r_{54} = 66100 - 60100 = 6000;$$

Лабораторная работа по ТПР выполнена на сайте www.matburo.ru
 Переходите на сайт, смотрите больше примеров или закажите свою работу
 ©МатБюро. Решение задач по математике, экономике, программированию

5. Рассчитываем 5-й столбец матрицы рисков.

$$r_{15} = 72100 - 48100 = 24000; r_{25} = 72100 - 54100 = 18000; r_{35} = 72100 - 60100 = 12000;$$

$$r_{45} = 72100 - 66100 = 6000; r_{55} = 72100 - 72100 = 0;$$

A_i	B_1	B_2	B_3	B_4	B_5
A_1	0	6000	12000	18000	24000
A_2	6000	0	6000	12000	18000
A_3	12000	6000	0	6000	12000
A_4	18000	12000	6000	0	6000
A_5	24000	18000	12000	6000	0

Выбираем из (24000; 18000; 12000; 18000; 24000) минимальный элемент $\min=12000$
 Вывод: выбираем стратегию 3.

Критерий Гурвица.

Критерий Гурвица является критерием пессимизма - оптимизма. За оптимальную принимается та стратегия, для которой выполняется соотношение:

$$\max(s_i)$$

$$\text{где } s_i = y \min(a_{ij}) + (1-y)\max(a_{ij})$$

Рассчитываем s_i .

$$s_1 = 0,5 \cdot 48100 + (1-0,5) \cdot 48100 = 48100$$

$$s_2 = 0,5 \cdot 42100 + (1-0,5) \cdot 54100 = 48100$$

$$s_3 = 0,5 \cdot 36100 + (1-0,5) \cdot 60100 = 48100$$

$$s_4 = 0,5 \cdot 30100 + (1-0,5) \cdot 66100 = 48100$$

$$s_5 = 0,5 \cdot 24100 + (1-0,5) \cdot 72100 = 48100$$

A_i	B_1	B_2	B_3	B_4	B_5	$\min(a_{ij})$	$\max(a_{ij})$	$y \min(a_{ij}) + (1-y)\max(a_{ij})$
A_1	48100	48100	48100	48100	48100	48100	48100	48100
A_2	42100	54100	54100	54100	54100	42100	54100	48100
A_3	36100	48100	60100	60100	60100	36100	60100	48100
A_4	30100	42100	54100	66100	66100	30100	66100	48100
A_5	24100	36100	48100	60100	72100	24100	72100	48100

Выбираем из (48100; 48100; 48100; 48100; 48100) максимальный элемент $\max=48100$.

Вывод: не важно, какую стратегию выбирать.

Вывод: в результате решения статистической игры по большинству критериев рекомендовалась стратегия A_3 , то есть покупать нужно 2000 билетов.

Задача 2

Решить задачу методом деревьев.

Фермер Мак-кой может выращивать либо кукурузу, либо соевые бобы. Вероятность того, что цены на будущий урожай этих культур повысятся, останутся на том же уровне или понизятся, равна соответственно 0.25, 0.30 и 0.45. Если цены возрастут, урожай кукурузы даст 30 000 долларов чистого дохода, а урожай соевых бобов – 10 000 долларов. Если цены останутся неизменными, Мак-кой лишь покроет расходы. Но если цены станут ниже, урожай кукурузы и соевых бобов приведет к потерям в 35 000 и 5 000 долларов соответственно.

- Представьте данную задачу в виде дерева решений.
- Какую культуру следует выращивать Мак-кою?

Решение.

- Дерево решений.



- Рассчитываем ожидаемые доходы в точках 1 и 2.

Лабораторная работа по ТПР выполнена на сайте www.matburo.ru
 Переходите на сайт, смотрите больше примеров или закажите свою работу
 ©МатБюро. Решение задач по математике, экономике, программированию



Ожидаемый выигрыш выше при выращивании бобов (250 больше -8250).

Задача 3

Решить задачу методом иерархий.

Кевин и Джун Парки (К и Д) покупают новый дом. Рассматриваются три варианта А, В, С. Парки согласовали два критерия для выбора дома: площадь зеленой лужайки (Л) и близость к месту работы (Б), а также разработали матрицы сравнений, приведенные ниже. Необходимо оценить три дома в порядке их приоритета и вычислить коэффициент согласованности каждой матрицы.

А	К	Д	A_K	Л	Б
К	1	2	Л	1	1/3
Д	1/2	1	Б	3	1

A_L	Л	Б	A_{KL}	А	В	С
Л	1	4	А	1	2	3
Б	1/4	1	В	1/2	1	2
			С	1/3	1/2	1

A_{KB}	А	В	С
А	1	2	1/2
В	1/2	1	1/3
С	2	3	1

A_{LB}	А	В	С
А	1	4	2
В	1/4	1	3
С	1/2	1/3	1

A_{LB}	А	В	С
А	1	1/2	4
В	2	1	3
С	1/4	1/3	1

Решение.

Матрица попарных сравнений площади зеленой лужайки Кевином.

A_{KL}	А	В	С
А	1	2	3
В	1/2	1	2
С	1/3	1/2	1

Сначала определяем оценки компонент собственного вектора.

A_{KL}	А	В	С	СВ
А	1	2	3	$(1+2+3)/3=2$
В	1/2	1	2	$(1/2+1+2)/3=1,17$
С	1/3	1/2	1	$(1/3+1/2+1)/3=0,67$
				3,78

Получив сумму оценок собственных векторов ($=7,74$), вычисляем нормализованные оценки вектора приоритета для каждого критерия, разделив значение оценки собственного вектора на эту сумму.

A_{KL}	А	В	С	Оценки компонент собственного	Нормализованные оценки вектора приоритета

Лабораторная работа по ТПР выполнена на сайте www.matburo.ru
 Переходите на сайт, смотрите больше примеров или закажите свою работу
 ©МатБюро. Решение задач по математике, экономике, программированию

				вектора	
A	1	2	3	2	0,53
B	1/2	1	2	1,17	0,31
C	1/3	1/2	1	0,67	0,16
				3,78	

Далее находим суммы по столбцам и находим произведение суммы по столбцам и нормализованной оценки вектора приоритета.

A _{кл}	A	B	C	Оценки компонент собственного вектора	Нормализованные оценки вектора приоритета
A	1	2	3	2	0,53
B	1/2	1	2	1,17	0,31
C	1/3	1/2	1	0,67	0,16
	1,83	3,5	6	3,78	
	0,97	1,08	0,97	3,02	

Случайная согласованность матрицы 3 порядка = 0,58.

$L_{\max} = 3,02$.

Ис (индекс согласованности) = $(L_{\max} - n) / (n - 1)$

Ис = $(3,02 - 3) / (3 - 1) = 0,011$

ОС = $0,011 / 0,58 = 2\%$

Величина ОС < 10% значит пересматривать приоритеты нет необходимости.

Лабораторная работа по ТПР выполнена на сайте www.matburo.ru
 Переходите на сайт, смотрите больше примеров или закажите свою работу
 ©МатБюро. Решение задач по математике, экономике, программированию

Матрица попарных сравнений площади зеленой лужайки Джун.

A _{дл}	A	B	C	Оценки компонент собственного вектора	Нормализованные оценки вектора приоритета
A	1	4	2	2,33	0,54
B	1/4	1	3	1,42	0,32
C	1/2	1/3	1	0,61	0,14
	1,75	5,33	6,00	4,36	
	0,94	1,73	0,84	3,51	

$$L_{\max} = 3,51.$$

$$I_c = (3,51-3)/(3-1) = 0,255$$

$$OC = 0,255/0,58 = 44\%$$

Величина $OC > 10\%$ значит Джун стоит пересмотреть приоритеты.

Матрица попарных сравнений близости к месту работы Кевином.

A _{кб}	A	B	C	Оценки компонент собственного вектора	Нормализованные оценки вектора приоритета
A	1,00	2,00	0,50	1,17	0,31
B	0,50	1,00	0,33	0,61	0,16
C	2,00	3,00	1,00	2,00	0,53
	3,50	6,00	1,83	3,78	
	1,08	0,97	0,97	3,02	

$$L_{\max} = 3,02.$$

$$I_c = (3,02-3)/(3-1) = 0,011$$

$$OC = 0,011/0,58 = 2\%$$

Величина $OC < 10\%$ значит пересматривать приоритеты нет необходимости.

Лабораторная работа по ТПР выполнена на сайте www.matburo.ru
 Переходите на сайт, смотрите больше примеров или закажите свою работу
 ©МатБюро. Решение задач по математике, экономике, программированию

Матрица попарных сравнений близости к месту работы Джун.

A _{дб}	A	B	C	Оценки компонент собственного вектора	Нормализованные оценки вектора приоритета
A	1,00	0,50	4,00	1,83	0,42
B	2,00	1,00	3,00	2,00	0,46
C	0,25	0,33	1,00	0,53	0,12
	3,25	1,83	8,00	4,36	
	1,37	0,84	0,97	3,18	

$$L_{\max} = 3,18.$$

$$I_c = (3,18-3)/(3-1) = 0,088$$

$$OC = 0,088/0,58 = 15\%$$

Величина $OC > 10\%$ значит Джун стоит пересмотреть приоритеты.

Итак, мы получили нормализованные оценки векторов приоритета для Кевина и Джун по каждому критерию.

Теперь определим значимость критериев.

Матрица значимости критериев Кевина.

A _к	Л	Б	Оценки компонент собственного вектора	Нормализованные оценки вектора приоритета
Л	1	1/3	0,67	0,25
Б	3	1	2,00	0,75
	4	1,33	2,67	
	1	1	2	

Случайная согласованность матрицы 2 порядка = 0.

$$L_{\max} = 2.$$

$$I_c = (2-2)/(2-1) = 0$$

$OC = 0, < 10\%$ значит пересматривать приоритеты нет необходимости.

Теперь находим нормализованный вектор значимости вариантов домов с учетом значимости критериев для Кевина:

$$\begin{pmatrix} 0,53 \cdot 0,25 + 0,31 \cdot 0,75 \\ 0,31 \cdot 0,25 + 0,16 \cdot 0,75 \\ 0,16 \cdot 0,25 + 0,53 \cdot 0,75 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,365 \\ 0,198 \\ 0,437 \end{pmatrix}$$

Матрица значимости критериев Джун.

A _к	Л	Б	Оценки компонент собственного	Нормализованные оценки вектора приоритета

Лабораторная работа по ТПР выполнена на сайте www.matburo.ru
 Переходите на сайт, смотрите больше примеров или закажите свою работу
 ©МатБюро. Решение задач по математике, экономике, программированию

			вектора	
Л	1	4	2,5	0,8
Б	1/4	1	0,63	0,2
	1,25	5,00	3,13	
	1	1	2	

Случайная согласованность матрицы 2 порядка = 0.

$$L_{\max} = 2.$$

$$I_c = (2-2)/(2-1) = 0$$

ОС = 0, < 10% значит пересматривать приоритеты нет необходимости.

Теперь находим нормализованный вектор значимости вариантов домов с учетом значимости критериев для Джун:

$$\begin{pmatrix} 0,54 \cdot 0,8 + 0,42 \cdot 0,2 \\ 0,32 \cdot 0,8 + 0,46 \cdot 0,2 \\ 0,14 \cdot 0,8 + 0,12 \cdot 0,2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,516 \\ 0,348 \\ 0,136 \end{pmatrix}$$

Лабораторная работа по ТПР выполнена на сайте www.matburo.ru
 Переходите на сайт, смотрите больше примеров или закажите свою работу
 ©МатБюро. Решение задач по математике, экономике, программированию

Теперь определим значимость мнений Кевина и Джун.

Матрица значимости мнений Кевина и Джун.

A_k	К	Д	Оценки компонент собственного вектора	Нормализованные оценки вектора приоритета
К	1	2	1,50	0,67
Д	1/2	1	0,75	0,33
	1,50	3,00	2,25	
	1	1	2	

Случайная согласованность матрицы 2 порядка = 0.

$$L_{\max} = 2.$$

$$I_c = (2-2)/(2-1) = 0$$

ОС = 0, < 10% значит пересматривать приоритеты нет необходимости.

Находим нормализованный вектор значимости вариантов домов.

$$\begin{pmatrix} 0,365 \cdot 0,67 + 0,516 \cdot 0,33 \\ 0,198 \cdot 0,67 + 0,348 \cdot 0,33 \\ 0,437 \cdot 0,67 + 0,136 \cdot 0,33 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,415 \\ 0,247 \\ 0,338 \end{pmatrix}$$

Максимальное значение нормализованной оценки – у дома А, следовательно, нужно выбрать его.