

Решенная контрольная работа по МОР

1. Построить симплексную таблицу ЗЛП

$$Q = x_1 - 3x_2 - 2x_3 \rightarrow \max$$

при ограничениях:

$$\begin{cases} 3x_1 + x_2 - 2x_3 \geq 13 \\ x_1 - 3x_2 + x_3 = 1 \\ x_1 + 2x_2 + 3x_3 \leq 11 \\ x_1 \geq 0; x_2 \geq 0; x_3 \geq 0. \end{cases}$$

Решение

Приводим задачу к каноническому виду. Для этого в первое неравенство вводим дополнительную переменную x_4 со знаком минус, так как знак неравенства \geq , а также искусственный базис z_1 . Во второе уравнение вводим искусственный базис z_2 . В третье неравенство вводим дополнительную переменную x_5 со знаком плюс, так как знак неравенства \leq .

Тогда, можем записать:

$$Q = x_1 - 3x_2 - 2x_3 + z_1 + z_2 + 0 \cdot x_5 \rightarrow \max$$

$$\begin{cases} 3x_1 + x_2 - 2x_3 - x_4 + z_1 = 13 \\ x_1 - 3x_2 + x_3 + z_2 = 1 \\ x_1 + 2x_2 + 3x_3 + x_5 = 11 \\ x_i \geq 0, i = 1, 2, 3, 4, 5 \end{cases}$$

Дальнейшее решение представим в симплекс – таблицах.

Таблица 1

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L
1				1	-3	-2	0	0	1	1		
2	Базис	Сб	b	x1	x2	x3	x4	x5	z1	z2	Отношения	Кэфф.
3	z1	1	13	3	1	-2	-1	0	1	0	4,33	3,00
4	z2	1	1	1	-3	1	0	0	0	1	1,00	-
5	x5	0	11	1	2	3	0	1	0	0	11,00	1,00
6		Q	0	-1	3	2	0	0	0	0		
7			14	-4	2	1	1	0	0	0		

Так как задача на нахождение максимального значения целевой функции, то в индексной второй строке выбираем наибольшую по модулю отрицательную оценку, которая находится в столбце с переменной x_1 . Выделим столбец. Далее, находим оценочные отношения делением столбца С на столбец D, из которых выбираем наименьшее – это вторая строка, которую также выделим. В последний столбец запишем пересчитывающие коэффициенты, которые необходимы для

пересчёта первой и третьей строк. Вторую строку перепишем без изменений. Из базиса выводим искусственный базис z_2 , при этом в базис вводим переменную x_1 . Первую и треть строки пересчитываем по методу Гаусса. Столбец, который соответствовал искусственному базису z_2 , в дальнейшем не учитываем. В результате перейдём к таблице 2.

Таблица 2

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L
1				1	-3	-2	0	0	1	1		
2	Базис	Сб	b	x1	x2	x3	x4	x5	z1	z2	Отношения	Козфф.
10	z1	1	10	0	10	-5	-1	0	1		1	-
11	x1	1	1	1	-3	1	0	0	0		-	-0,3
12	x5	0	10	0	5	2	0	1	0		2	0,5
13		Q	1	0	0	3	0	0	0			
14			10	0	-10	5	1	0	-1			

План не оптимален, так как в базисе присутствует искусственный базис. Требуется улучшение плана. Снова в индексной строке выбираем наибольшую по модулю отрицательную оценку, которая находится в столбце с переменной x_2 . Выделим столбец. Наименьшее оценочное отношение находится в первой строке, которую также выделим. Из базиса будем выводить искусственный базис z_1 , при этом в базис вводим переменную x_2 . Элементы первой строке делим на 10, а вторую и третью строки пересчитываем по методу гаусса. В результате получим таблицу 3.

Таблица 3

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L
1				1	-3	-2	0	0	1	1		
2	Базис	Сб	b	x1	x2	x3	x4	x5	z1	z2	Отношения	Козфф.
17	x2	-3	1	0	1	-0,5	-0,1	0				
18	x1	1	4	1	0	-0,5	-0,3	0				
19	x5	0	5	0	0	4,5	0,5	1				
20			1	0	0	3	0	0				

Так как в индексной строке нет отрицательных оценок, то получен оптимальный план: $Q_{\max}(4;1;0) = 1$.

2. Найти оптимальные стратегии игроков и цену игры, заданной матрицей

$$\begin{pmatrix} -4 & 3 \\ 8 & -5 \end{pmatrix} .$$

Какому игроку выгодна эта игра?

Решение

Шаг:1

Определим нижнюю цену игры - α

Нижняя цена игры α — это максимальный выигрыш, который мы можем гарантировать себе, в игре против разумного противника, если на протяжении всей игры будем использовать одну и только одну стратегию (такая стратегия называется "чистой").

Найдем в каждой строке платежной матрицы **минимальный** элемент и запишем его в дополнительный столбец (таблица 1).

Затем найдем **максимальный** элемент дополнительного столбца (отмечен звездочкой), это и будет нижняя цена игры.

Таблица 1

Стратегии "А"	Стратегии "В"		Минимумы строк
	В ₁	В ₂	
А ₁	-4	3	-4*
А ₂	8	-5	-5

В нашем случае нижняя цена игры равна: $\alpha = -4$, и для того чтобы гарантировать себе выигрыш не хуже чем -4 мы должны придерживаться стратегии А₁.

Шаг:2

Определим верхнюю цену игры - β

Верхняя цена игры β — это минимальный проигрыш, который может гарантировать себе игрок "В", в игре против разумного противника, если на протяжении всей игры он будет использовать одну и только одну стратегию. Найдем в каждом столбце платежной матрицы **максимальный** элемент и запишем его в дополнительную строку снизу (таблица 2).

Затем найдем **минимальный** элемент дополнительной строки (отмечен плюсом), это и будет верхняя цена игры.

Таблица 2

		Стратегии "В"		
Стратегии "А"		В ₁	В ₂	Минимумы строк
А ₁	-4	3	-4*	
А ₂	8	-5	-5	
Максимумы столбцов		8	3 ⁺	

В нашем случае верхняя цена игры равна: $\beta = 3$, и для того чтобы гарантировать себе проигрыш не хуже чем 3 противник (игрок "В") должен придерживаться стратегии В₂

Шаг:3

Сравним нижнюю и верхнюю цены игры, в данной задаче они различаются, т.е. $\alpha \neq \beta$, платежная матрица не содержит седловой точки. Это значит, что игра не имеет решения в чистых минимаксных стратегиях, но она всегда имеет решение в смешанных стратегиях.

Смешанная стратегия, это чередуемые случайным образом чистые стратегии, с определенными вероятностями (частотами).

Смешанную стратегию игрока "А" будем обозначать

$$S_A = \begin{vmatrix} A_1 & A_2 \\ p_1 & p_2 \end{vmatrix},$$

где А₁, А₂ - стратегии игрока "А", а р₁, р₂ - соответственно вероятности (частоты), с которыми эти стратегии применяются, причем $p_1 + p_2 = 1$.

Аналогично смешанную стратегию игрока "В" будем обозначать

$$S_B = \begin{vmatrix} B_1 & B_2 \\ q_1 & q_2 \end{vmatrix},$$

где В₁, В₂ - стратегии игрока "В", а q₁, q₂ - соответственно вероятности, с которыми эти стратегии применяются, причем $q_1 + q_2 = 1$.

Оптимальная смешанная стратегия для игрока "А" та, которая обеспечивает ему максимальный выигрыш. Соответственно для "В" - минимальный проигрыш. Обозначаются эти стратегии S_A^* и S_B^* соответственно. Пара оптимальных стратегий образует решение игры.

В общем случае в оптимальную стратегию игрока могут входить не все исходные стратегии, а только некоторые из них. Такие стратегии называются **активными стратегиями**.

Шаг:4

Найдём оптимальную стратегию для игрока А.

Если предположить, что игрок "В" будет пользоваться чистой стратегией B_1 , то средний выигрыш v составит:

$$k_{11}p_1 + k_{21}p_2 = v \quad (1)$$

С другой стороны, если предположить, что игрок "В" будет пользоваться чистой стратегией B_2 , то средний выигрыш составит:

$$k_{12}p_1 + k_{22}p_2 = v \quad (2)$$

Приравняв левые части уравнений (1) и (2) получим

$$k_{11}p_1 + k_{21}p_2 = k_{12}p_1 + k_{22}p_2,$$

С учётом того, что $p_1 + p_2 = 1$, имеем

$$k_{11}p_1 + k_{21}(1 - p_1) = k_{12}p_1 + k_{22}(1 - p_1),$$

Откуда найдём оптимальную частоту стратегии A_1 :

$$p_1 = \frac{k_{22} - k_{21}}{k_{11} + k_{22} - k_{12} - k_{21}} = \frac{-5 - 8}{-4 - 5 - 3 - 8} = \frac{13}{20}.$$

Вероятность p_2 найдём вычитанием p_1 из единицы:

$$p_2 = 1 - p_1 = 1 - \frac{13}{20} = \frac{7}{20}.$$

Шаг 5:

Найдём цену игры: $v = k_{11}p_1 + k_{21}p_2 = -4 \cdot \frac{13}{20} + 8 \cdot \frac{7}{20} = \frac{1}{5}$.

Шаг 6:

Найдём оптимальную стратегию для игрока В.

Если игрок "В" использует свою оптимальную стратегию, а игрок "А" остается в рамках своих активных стратегий, то средний выигрыш остается неизменным и равным цене игры v независимо от того как игрок "А" использует свои активные стратегии. Поэтому если предположить, что игрок "А" будет пользоваться чистой стратегией A_1 , то средний выигрыш v составит:

$$k_{11}q_1 + k_{12}q_2 = v \quad (3)$$

Так как цена игры уже известна учитывая то, что $q_1 + q_2 = 1$, то оптимальную частоту стратегии B_1 найдём так:

$$q_1 = \frac{v - k_{12}}{k_{11} - k_{12}} = \frac{\frac{1}{5} - 3}{-4 - 3} = \frac{2}{5}.$$

Вероятность q_2 найдём вычитанием q_1 из единицы:

$$q_2 = 1 - q_1 = 1 - \frac{2}{5} = \frac{3}{5}.$$

Ответ: нижняя цена игры: $\alpha = -4$, верхняя цена игры: $\beta = 3$, цена игры $v = \frac{1}{5}$,

Контрольная работа по МОР выполнена на сайте www.matburo.ru
Переходите на сайт, смотрите больше примеров или закажите свою работу
©МатБюро. Решение задач по математике, экономике, программированию

оптимальная стратегия игрока А: $S_A = \left| \begin{array}{cc} A_1 & A_2 \\ \frac{13}{20} & \frac{7}{20} \end{array} \right|,$

оптимальная стратегия игрока В: $S_B = \left| \begin{array}{cc} B_1 & B_2 \\ \frac{2}{5} & \frac{3}{5} \end{array} \right|.$

Игроку А эта игра выгоднее.