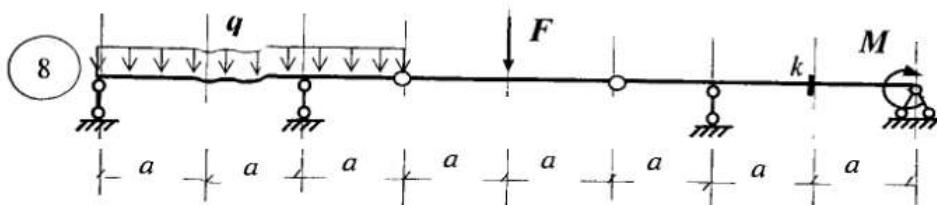


## Решение заданий по строительной механике

### Расчет многопролетной статически определимой балки

Для балки требуется:

1. Построить эпюры  $M$  и  $Q$  (аналитически);
2. Построить линии влияния  $M$  и  $Q$  для заданного сечения, а также линию влияния одной опорной реакции  $R$  (по выбору студента);
3. Определить по линиям влияния значения  $M$ ,  $Q$ ,  $R$  от заданной нагрузки;
4. Определить прогиб и угол поворота заданного сечения балки.



Дано:  $a = 4,6 \text{ м}$ ,  $q = 2,4 \text{ кН/м}$ ,  $F = 24 \text{ кН}$ ,  $M = 10 \text{ кН}$ ; схема 8

РЕШЕНИЕ.

#### 1. Построение эпюр $M$ и $Q$ аналитически.

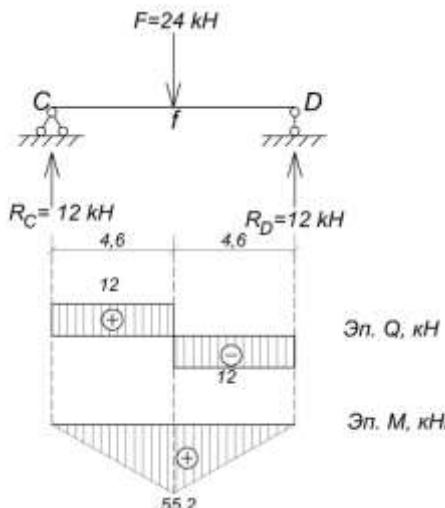
Строим поэтажную схему балки, для чего делим заданную балку по шарнирам на три: две нижние ABC и DEN и одну промежуточную CD (рис. 1-а)

Для построения эпюр  $Q$  и  $M$  для многопролетной статически определимой балки нужно отдельно построить эпюры для каждой балки (основных и промежуточной), а затем их совместить. Определение значений изгибающих моментов и поперечных сил следует вначале проводить для промежуточной балки CD, так как её опорные реакции не зависят от нагрузок на нижележащих балках.

#### - Балка CD (рис. 1):

Опорные реакции:

$$R_C = R_D = \frac{F}{2} = \frac{24}{2} = 12 \text{ кН}$$



Эпюра поперечных сил  $Q$ :

$$Q_{Cf} = R_C = 12 \text{ кН}$$

$$Q_{fD} = R_C - F = 12 - 24 = -12 \text{ кН}$$

Эпюра изгибающих моментов  $M$ :

$$M_C = 0;$$

$$M_f = R_D * 4.6 = 12 * 4.6 = 55.2 \text{ кНм};$$

$$M_D = R_D * 9.2 - F * 4.6 = 12 * 9.2 - 24 * 4.6 = 0$$

#### - балка ABC (рис. 2):

акомильные фрагменты работы. Вы можете заказать

контрольную или курсовую работу по своей теме и требованиям на сайте [МатБюро](http://www.MatBuro.ru).

Рисунок 1

Опорные реакции:

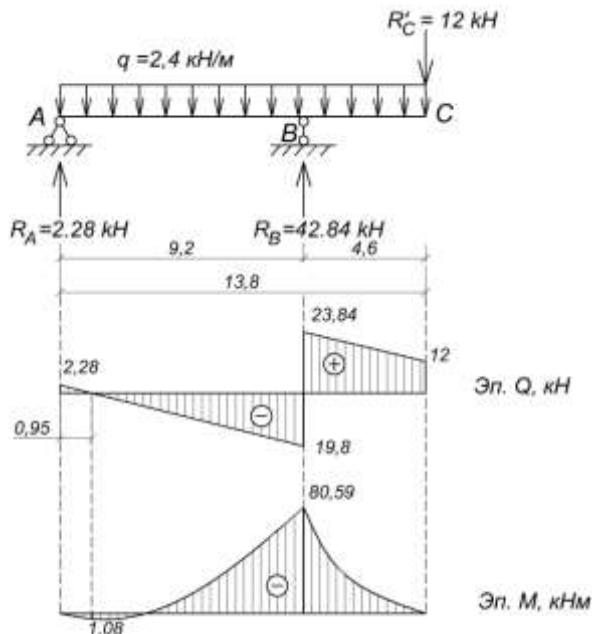


Рисунок 2

$$\sum M_A = R_B * 9.2 - q * \frac{13.8^2}{2} - R_C' * 13.8 = 0,$$

где  $R_C' = 12 \text{ kN}$  – реактивная сила, равная по величине опорной реакции  $R_C$  и противоположная ей по направлению. Отсюда

$$R_B = \frac{q * \frac{13.8^2}{2} + R_C' * 13.8}{9.2} = \frac{2.4 * \frac{13.8^2}{2} + 12 * 13.8}{9.2} = 42.84 \text{ kN}$$

$$\begin{aligned} \sum M_B &= -R_A * 9.2 + q * \frac{13.8^2}{2} - q * \frac{13.8^2}{2} - R_C' * 4.6 = \\ &= -R_A * 9.2 + 2.4 * \frac{9.2^2}{2} - 2.4 * \frac{4.6^2}{2} - 12 * 4.6 = -R_A * 9.2 + 20.976 = 0; \end{aligned}$$

$$R_A = \frac{20.976}{9.2} = 2.28 \text{ kN}$$

Проверка правильности вычислений опорных реакций:

$$\sum Y_i = 0; \quad \sum Y_i = R_A + R_B - q * 13.8 - R_C' = 2.28 + 42.84 - 2.4 * 13.8 - 12 = 0$$

Построение эпюр:

Участок АВ:  $0 \leq x \leq 9.2$

$$Q_{AB} = R_A - qx; \quad M_{AB} = R_A * x - q * \frac{x^2}{2};$$

$$x = 0 \quad Q_A = 2.28 \text{ kN}, \quad M_A = 0;$$

$$x = 9.2 \quad Q_B = -19.8 \text{ kN}, \quad M_B = -80.59 \text{ kNm}$$

$$x_0 = \frac{R_A}{q} = \frac{2.28}{2.4} = 0.95 \text{ м}$$

$$M_{extr} = 2.28 * 0.95 - 2.4 * \frac{0.95^2}{2} = 1.083$$

Участок ВС:  $9.2 \leq x \leq 13.8$

В этом файле выложены только ознакомительные фрагменты работы. Вы можете заказать контрольную или курсовую работу по своей теме и требованиям на сайте [МатБюро](http://www.MatBuro.ru).

$$Q_{BC} = R_A - qx + R_B; \quad M_{AB} = R_A * x - q * \frac{x^2}{2} + R_B(x - 9.2);$$

$$x = 9.2 \quad Q_B = 23.04 \text{ kH}, \quad M_B = -80.59 \text{ kNm}$$

$$x = 13.8 \quad Q_C = 12 \text{ kH}, \quad M_C = 0$$

- балка DN (рис. 3) :

Опорные реакции:

$$\sum M_D = -R_N * 9.2 - M + R'_D * 4.6 = -R_N * 9.2 - 10 + 12 * 4.6 = -R_N * 9.2 + 45.2 = 0;$$

$$R_N = \frac{45.2}{9.2} = 4.91 \text{ kH}$$

$$\sum M_N = -R_E * 9.2 + R'_D * 13.8 - M = -R_E * 9.2 + 12 * 13.8 - 10 =$$

$$= -R_E * 9.2 + 155.6 = 0;$$

$$R_E = \frac{155.6}{9.2} = 16.91 \text{ kH};$$

Проверка правильности вычислений опорных реакций:

$$\sum Y_i = 0; \quad \sum Y_i = R_E - R_N - R'_C = 16.91 - 4.91 - 12 = 0$$

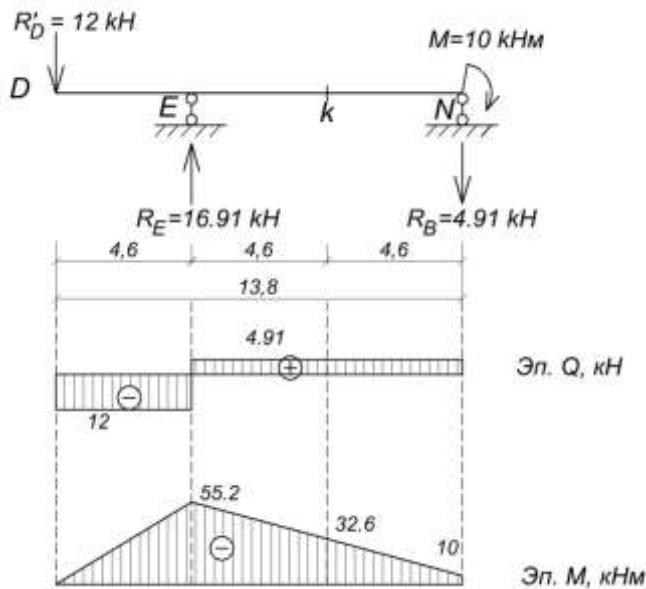


Рисунок 3

Построение эпюр:

Участок DE:  $0 \leq x \leq 4.6$

$$Q_{DE} = -R'_D = -12 \text{ kH} = \text{const}; \quad M_{DE} = -R'_D * x;$$

$$x = 0 \quad M_D = 0;$$

$$x = 4.6 \quad M_E = -12 * 4.6 = -55.2 \text{ kNm},$$

Участок EN:  $4.6 \leq x \leq 13.8$

$$Q_{EN} = -R'_D + R_E = -12 + 16.91 = 4.91 \text{ kH} = \text{const};$$

$$M_{DE} = -R'_D * x + R_E(x - 4.6);$$

$$x = 4.6 \quad M_E = -12 * 4.6 = -55.2 \text{ kNm},$$

В этом файле выложены только ознакомительные фрагменты работы. Вы можете заказать контрольную или курсовую работу по своей теме и требованиям на сайте [МатБюро](http://www.MatBuro.ru).

$$x = 9.2 \quad M_k = -12 * 9.2 + 16.91 * 4.6 = -32.6 \text{ kNm},$$

$$x = 13.8 \quad M_N = -12 * 13.8 + 16.91 * 9.2 = -10 \text{ kNm},$$

Соединяем эпюры участков балки в общую эпюру (рис. 4)

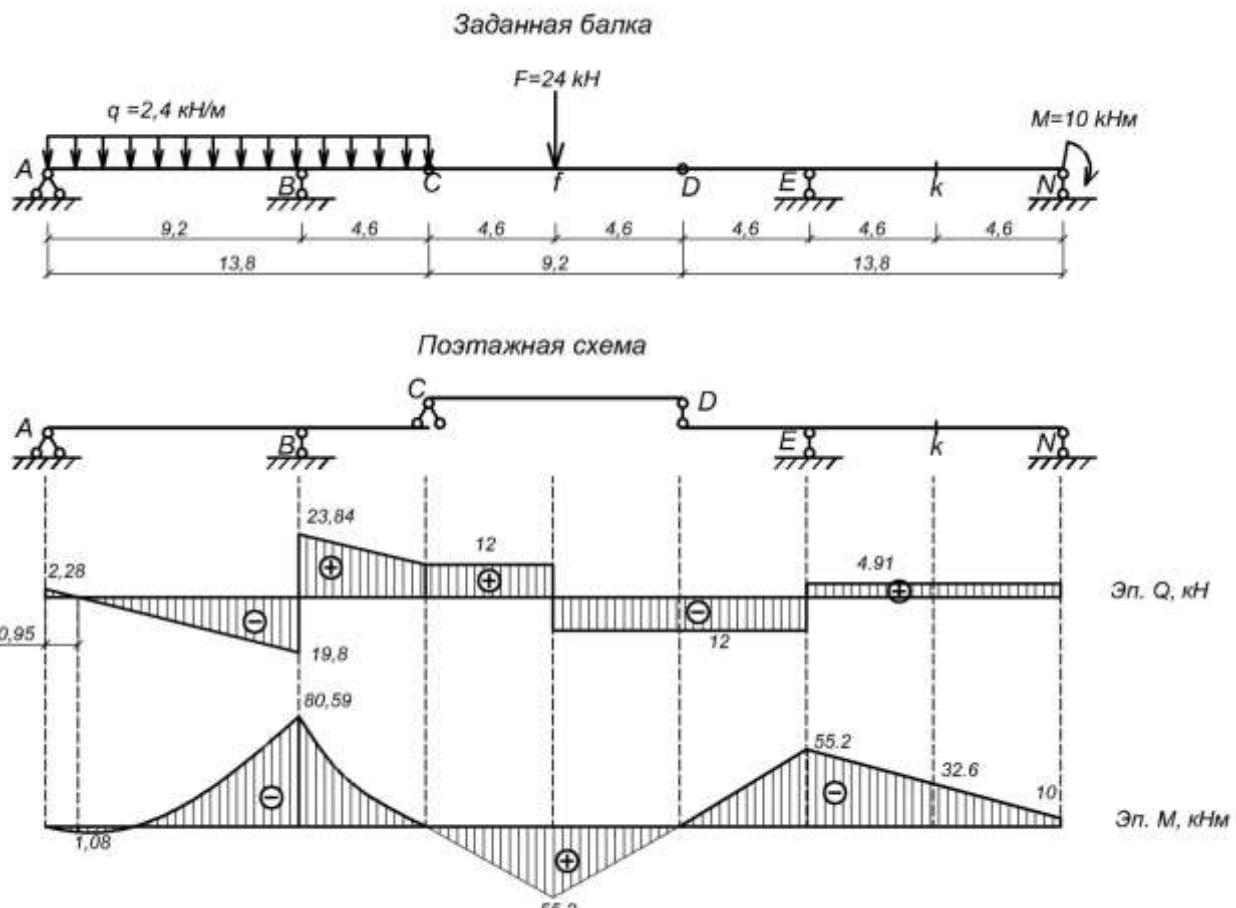


Рисунок 4

## 2. Построение линий влияния.

Будем строить линии влияния для однопролетных балок, на которых расположены интересующие нас опоры и сечения, а затем достраивать линии влияния вправо и влево, соблюдая правило: в шарнирах линии влияния меняют направление (переламываются), на опорах – пересекают ось X (т.е. ордината линии влияния равна нулю).

### 2.1.Линия влияния опорной реакции $R_E$ (рис. 5):

Рассмотрим однопролетную балку DEK. Пусть груз  $F=1$  движется по балке. Значение реакции определяется из уравнения равновесия

$$\sum M_N = -R_E * 9.2 + F(13.8 - z) = 0$$

$$R_E = \frac{F(13.8 - z)}{9.2} = \frac{13.8 - z}{9.2};$$

В этом файле выложены только ознакомительные фрагменты работы. Вы можете заказать контрольную или курсовую работу по своей теме и требованиям на [сайте МатБюро](http://www.MatBuro.ru).

Задаваясь абсциссами  $z$  в характерных точках, получим значения ординат линии влияния реакции  $R_E$  (рис. 5-б)

$$z = 0 \quad R_E = 1,5; \quad z = 4.6 \quad R_1 = 1; \quad z = 13.8 \quad R_E = 0;$$

Достраиваем линию влияния для многопролетной балки, соблюдая правило: в шарнирах линия влияния меняет направление (переламывается), а на опорах – пересекает нулевую линию.

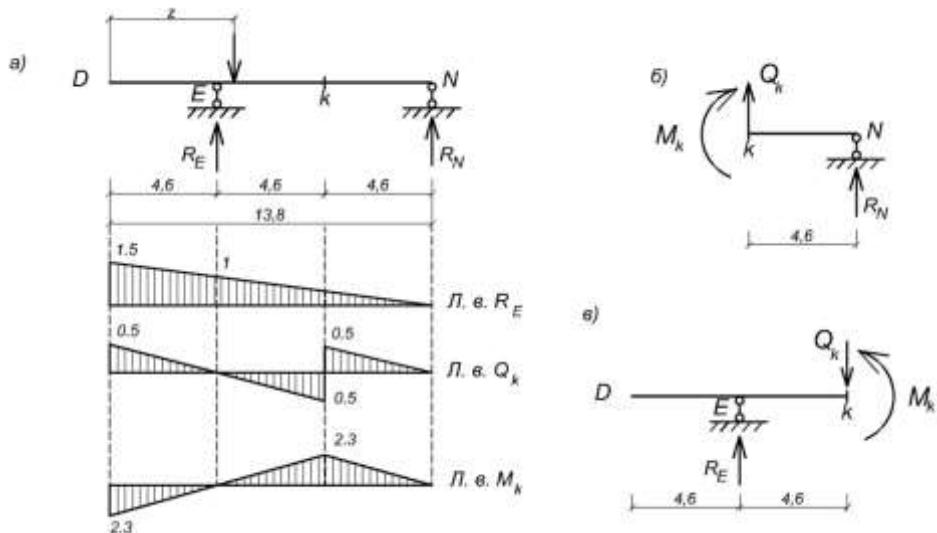


Рисунок 5

## 2.2.Линии влияния для сечения $k$ .

Сечение  $k$  находится в пролете  $EN$ . Рассмотрим два положения груза: слева и справа от сечения  $k$ .

Пусть груз находится слева от сечения  $k$ .

Рассмотрим равновесие правой части (рис. 5-б):

$$\sum Y = Q_k + R_N = 0; \quad Q_k = -R_N$$

$$\sum M_{(k)} = -M_k + R_N * 4.6 = 0; \quad M_k = R_N * 4.6$$

Значение реакции  $R_N$  определяется из уравнения равновесия

$$\sum M_E = R_N * 9.2 - F(z - 4.6) = 0$$

$$R_N = \frac{F(z - 4.6)}{9.2} = \frac{z - 4.6}{9.2};$$

$$\text{тогда } Q_k = -R_N = -\frac{z - 4.6}{9.2}; \quad M_k = R_N * 4.6 = \frac{4.6(z - 4.6)}{9.2} = 0,5(z - 4.6);$$

Задаваясь абсциссами  $z$  в характерных точках, получим значения ординат линий влияния  $Q_k$  и  $M_k$

$$\begin{array}{lll} z = 0 & Q_k = 0,5; & M_k = -2,3; \\ z = 4,6 & Q_k = 0; & M_k = 0; \\ z = 9,2 & Q_k = -0,5; & M_k = 2,3; \end{array}$$

Пусть груз  $F=1$  находится справа от сечения  $k$ . Рассмотрим равновесие левой части (рис.5-в):

В этом файле выложены только ознакомительные фрагменты работы. Вы можете заказать контрольную или курсовую работу по своей теме и требованиям на [сайте МатБюро](http://www.MatBuro.ru).

$$\sum Y = -Q_k + R_E = 0; \quad Q_k = R_E$$

$$\sum M_{(k)} = k - R_E * 4.6 = 0; \quad M_k = R_E * 4.6 = 0$$

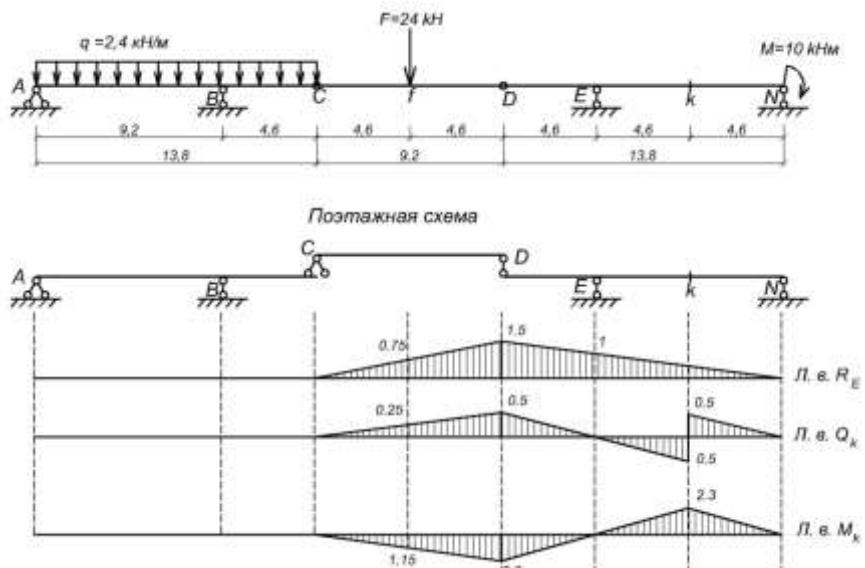
Реакцию  $R_E$  выразили через  $F$  в п. 2.1:

$$R_E = \frac{13.8 - z}{9.2}; \text{ тогда } Q_k = R_E = \frac{13.8 - z}{9.2}; \quad M_k = 4.6 * \frac{13.8 - z}{9.2} = 0.5(13.8 - z)$$

Задаваясь абсциссами  $z$  в характерных точках, получим значения ординат линий влияния  $Q_3$  и  $M_3$

$$\begin{array}{lll} z = 4.6 & Q_3 = 0.5; & M_3 = 2.3; \\ z = 13.8 & Q_3 = 0; & M_3 = 0; \end{array}$$

Линии влияния для многопролетной балки представлены на рис. 6.



## Рисунок 6

### 3. Определяем усилия от заданной нагрузки по линиям влияния.

Значение реакции опоры, изгибающего момента и поперечной силы в заданном сечении по соответствующей линии влияния определяется по формуле

$$S = \sum P * y + \sum q * \omega + \sum M * t g \alpha$$

Где  $S$  – искомая величина

Р – внешняя сила

q - распределенная нагрузка

у – ордината линии влияния в сечении балки под соответствующей силой

$\omega$  – площадь участка линии влияния под распределенной нагрузкой

$M * \operatorname{tg} \alpha$  – тангенс угла наклона л. в.

$$R_E = 24 * 0.75 - 10 * \frac{1.5}{13.8} = 16.91 \text{ kH}$$

В этом файле выложены только ознакомительные фрагменты работы. Вы можете заказать контрольную или курсовую работу по своей теме и требованиям на [сайте МатБюро](#).

$$Q_k = 24 * 0.25 - 10 * \frac{0.5}{4.6} = 4.91 \text{ kH}$$

$$M_k = 24(-1.15) - 10 * \frac{2.3}{4.6} = -32.6 \text{ kNm}$$

Результаты сравнения сводим в таблицу

Искомое усилие	$R_E$ , кН	$Q_k$ кН	$M_k$ , кНм
Найденное при построении эпюр	16.91	4.91	-32.6
Найденное по линии влияния	16.91	4.91	-32.6
Расхождение результатов	0	0	0

Усилия найденные аналитически и по линиям влияния совпадают.

#### 4. Определение перемещений сечения К.

Для определения перемещений воспользуемся формулой Симпсона

$$\Delta = \sum_{i=1}^n \frac{l_i}{6EI_i} \left( M_F^H \bar{A}^H + 4M_F^{Cp} \bar{M}^{Cp} + M_F^K \bar{M}^K \right)$$

Где  $l_i$  – длина участка;

$EI_i$  – жесткость балки на участке;

$M_F$  – значения изгибающих моментов с грузовой эпюры, соответственно в начале, в середине и в конце участка;

$\bar{M}$  – значения изгибающих моментов с единичной эпюры, соответственно в начале, в середине и в конце участка.

##### 4.1. Определение линейного перемещения сечения К.

Строим единичную эпюру от силы  $P=1$ , приложенной в сечении К

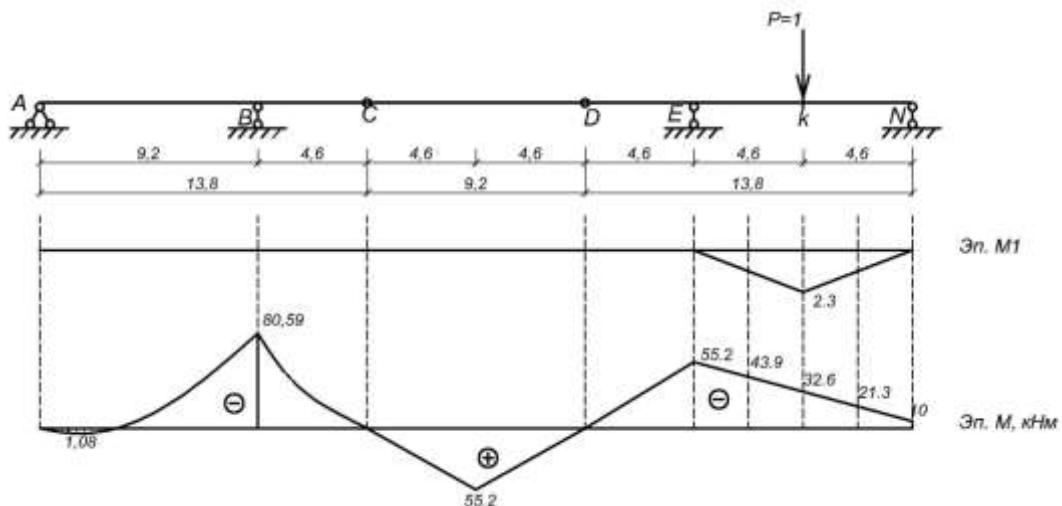


Рисунок 7

$$\Delta_K = -\frac{2.3}{6EI} (0 - 4 * 1.15 * 43.9 - 2.3 * 32.6 * 2 - 4 * 1.15 * 21.3 - 1 * 10) = -\frac{172.454}{EI} \text{ м}$$

Знак «минус» в значении перемещения говорит о том, что действительное перемещение сечения K будет противоположно изображенному на схеме, т.е. сечение переместится вверх.

#### 4.2. Определение угла поворота сечения K.

Строим единичную эпюру от момента  $M=1$ , приложенного в сечении K.

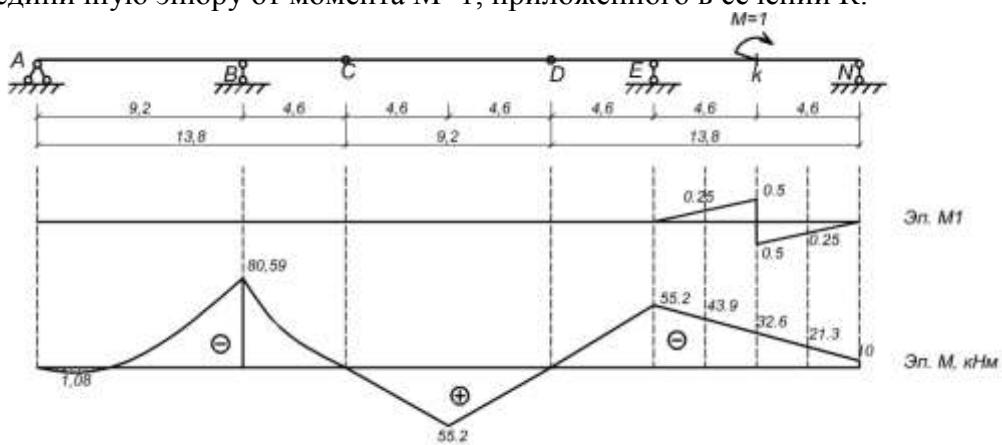


Рисунок 8

В этом файле выложены только ознакомительные фрагменты работы. Вы можете заказать контрольную или курсовую работу по своей теме и требованиям на сайте МатБюро.

$$\varphi_K = -\frac{2.3}{6EI} (0 + 4 * 0.25 * 43.9 + 0.5 * 32.6 - 0.5 * 32.6 - 4 * 0.25 * 21.3 + 0) \\ = -\frac{6.44}{EI} \text{ град}$$

Действительный поворот сечения к против хода часовой стрелки.