

## Решение заданий по строительной механике

### Динамический расчёт рамы

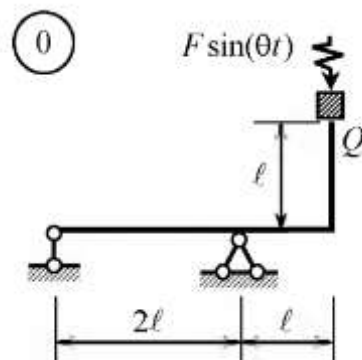
**Задание.** Для плоской рамы с размерами и нагрузкой требуется:

- 1) определить круговые частоты свободных вертикальных и горизонтальных колебаний, приняв раму как систему с двумя степенями свободы (собственный вес системы не учитывается);
- 2) построить эпюру изгибающих моментов с учетом динамического действия силы  $F$ .

Номер схемы -0, Вариант условий -8

$l = 3,4\text{м}$ ,  $Q = 9\text{кН}$ ,

$F = 2,4\text{кН}$ ,  $EJ = 25000\text{кНм}^2$



Система имеет две степени свободы, и положение массы определяется вертикальным и горизонтальным перемещениями.

Для определения частоты колебаний записываем вековое уравнение:

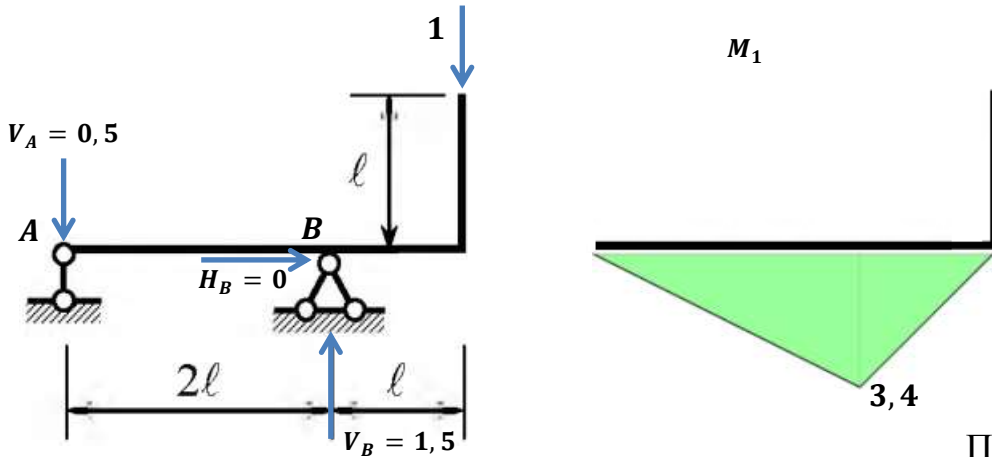
$$\begin{vmatrix} \delta_{11}m - \lambda & \delta_{12}m \\ \delta_{21}m & \delta_{22}m - \lambda \end{vmatrix} = 0$$

Здесь  $\delta_{11}, \delta_{12} = \delta_{21}, \delta_{22}$  – единичное перемещение по направлению возможных колебаний массы.

Строим эпюры  $M_1, M_2$ .

Прикладывая единичную вертикальную нагрузку, находим реакции опор.

$$V_A = \frac{1 \cdot l}{2l} = 0,5,$$
$$V_B = \frac{1 \cdot 3l}{2l} = 1,5, \quad H_B = 0$$

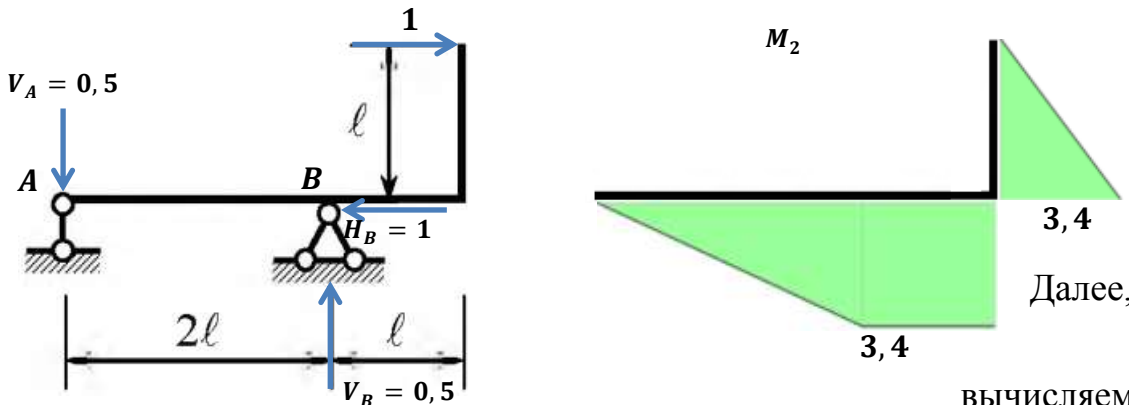


Прикладываем

единичную горизонтальную нагрузку, находим реакции опор.

$$V_A = \frac{1 \cdot l}{2l} = 0,5,$$

$$V_B = \frac{1 \cdot l}{2l} = 0,5, \quad H_B = 1$$



Далее,

вычисляем по

способу Верещагина:

$$\delta_{11} = \sum \int_0^l \frac{M_1 M_1}{EJ} = \frac{1}{EJ} \left( \frac{1}{2} \cdot 6,8 \cdot 3,4 \cdot \frac{2}{3} \cdot 3,4 + \frac{1}{2} \cdot 3,4 \cdot 3,4 \cdot \frac{2}{3} \cdot 3,4 \right) = \frac{39,3}{EJ}$$

$$\delta_{22} = \sum \int_0^l \frac{M_2 M_2}{EJ} = \frac{1}{EJ} \left( \frac{1}{2} \cdot 6,8 \cdot 3,4 \cdot \frac{2}{3} \cdot 3,4 + 3,4 \cdot 3,4 \cdot 3,4 + \right.$$

$$\left. + \frac{1}{2} \cdot 3,4 \cdot 3,4 \cdot \frac{2}{3} \cdot 3,4 \right) = \frac{78,6}{EJ}$$

$$\delta_{12} = \delta_{21} = \sum_0^l \int \frac{M_1 M_2}{EJ} = \frac{1}{EJ} \left( \frac{1}{2} \cdot 6,8 \cdot 3,4 \cdot \frac{2}{3} \cdot 3,4 + \frac{1}{2} \cdot 3,4 \cdot 3,4 \cdot 3,4 \right) = \frac{45,855}{EJ}$$

Запишем вековое уравнение:

$$\begin{vmatrix} \delta_{11}m - \lambda & \delta_{12}m \\ \delta_{21}m & \delta_{22}m - \lambda \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \frac{39,3}{EJ}m - \lambda & \frac{45,855}{EJ}m \\ \frac{45,855}{EJ}m & \frac{78,6}{EJ}m - \lambda \end{vmatrix} = 0$$

Полагая

$$x = \frac{\lambda EJ}{m}$$

получаем:

$$\begin{vmatrix} 39,3 - x & 45,855 \\ 45,855 & 78,6 - x \end{vmatrix} = 0$$

$$x^2 - 117,9x + 986,33 = 0$$

$$x_{1,2} = \frac{117,9 \pm 99,8}{1}$$

$$x_1 = 108,85, \quad x_2 = 9,05$$

Соответственно:

$$\lambda_1 = \frac{x_1 m}{EJ} = \frac{108,85m}{EJ}$$

$$\lambda_2 = \frac{x_2 m}{EJ} = \frac{9,05m}{EJ}$$

Находим частоты собственных колебаний:

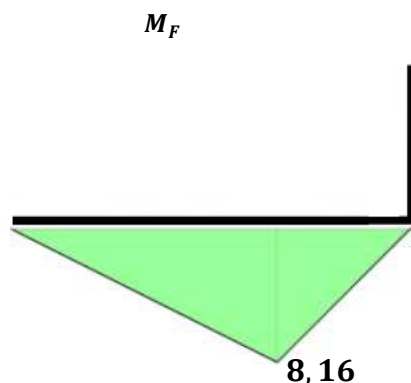
$$\omega_1 = \sqrt{\frac{1}{\lambda_1}} = \sqrt{\frac{EJ}{108,85m}} = 0,09584 \sqrt{\frac{EJ}{m}} = 0,09584 \cdot \sqrt{\frac{25000 \cdot 10^3 \cdot 9,81}{9000}} = 15,82 \frac{1}{c}$$

$$\omega_2 = \sqrt{\frac{1}{\lambda_2}} = \sqrt{\frac{EJ}{9,05m}} = 0,3324 \sqrt{\frac{EJ}{m}} = 0,3324 \cdot \sqrt{\frac{25000 \cdot 10^3 \cdot 9,81}{9000}} = 54,87 \frac{1}{c}$$

Записываем частоту изменений вибрационной нагрузки:

$$\theta = 0,5\omega_1 = 0,5 \cdot 0,956 \sqrt{\frac{EJ}{m}} = 0,478 \sqrt{\frac{EJ}{m}}, \quad \theta^2 = 0,0023 \cdot \frac{EJ}{m}$$

Построим эпюру  $M_F = M_1 F$



Определяем коэффициенты системы уравнений для определения инерционных сил:

$$\delta_{11}^* = \delta_{11} - \frac{1}{m\theta^2} = \frac{39,3}{EJ} - \frac{1}{m \cdot 0,0023 \frac{EJ}{m}} = -\frac{395,5}{EJ}$$

$$\delta_{22}^* = \delta_{22} - \frac{1}{m\theta^2} = \frac{78,6}{EJ} - \frac{1}{m \cdot 0,0023 \frac{EJ}{m}} = -\frac{356,2}{EJ}$$

$$\Delta_{1F} = \delta_{11} F = \frac{39,3 \cdot 2,4}{EJ} = \frac{94,32}{EJ}$$

$$\Delta_{2F} = \delta_{21} F = \frac{78,6 \cdot 2,4}{EJ} = \frac{188,64}{EJ}$$

Записываем систему уравнений:

$$\begin{cases} \delta_{11}^* I_1 + \delta_{12} I_2 + \Delta_{1F} = 0 \\ \delta_{21} I_1 + \delta_{22}^* I_2 + \Delta_{2F} = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} -\frac{395,5}{EJ}I_1 + \frac{45,855}{EJ}I_2 + \frac{94,32}{EJ} = 0 \\ \frac{45,855}{EJ}I_1 - \frac{356,2}{EJ}I_2 + \frac{188,64}{EJ} = 0 \end{cases}$$

Решая систему уравнений:

$$\begin{cases} -395,5I_1 + 45,855I_2 + 94,32 = 0 \\ 45,855I_1 - 356,2I_2 + 188,64 = 0 \end{cases}$$

Находим:

$$I_1 = 0,3 \text{ кН} \quad I_2 = 0,57 \text{ кН}$$

Строим эпюру динамических изгибающих моментов  $M_{\text{дин}}$ :

$$M_{\text{дин}} = M_F + M_1 I_1 + M_2 I_2$$

