

## Расчетно-графическая работа по математике с решением

### Ряды

$$p = 4, q = 7$$

I Исследовать сходимость числовых рядов.

$$1) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(p+1)n - q}{(q+2)n + p}$$

$$\text{Решение. } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{5n - 7}{9n + 4}$$

Используем необходимый признак сходимости. Вычисляем предел общего члена ряда:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{5n - 7}{9n + 4} = \left( \frac{\infty}{\infty} \right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{5 - 7/n}{9 + 4/n} = \frac{5 - 0}{9 + 0} = \frac{5}{9} \neq 0.$$

Признак не выполняется, значит, ряд расходится.

$$2) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(p+1)n - q}{n^{p+2} + qn^p + 10}$$

$$\text{Решение. } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{5n - 7}{n^6 + 7n^4 + 10}$$

Сравним данный ряд по предельному признаку сравнения со сходящимся рядом  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^5}$

(обобщенный гармонический ряд  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$  с показателем  $p = 5 > 1$ ):

$$\begin{aligned}\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{5n-7}{n^6+7n^4+10} : \frac{1}{n^5} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(5n-7)n^5}{n^6+7n^4+10} = \left( \frac{\infty}{\infty} \right) = \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(5-7/n)}{1+7/n^2+10/n^6} = \frac{5}{1} = 5 \neq 0, \infty\end{aligned}$$

Значит, исходный ряд также сходится.

$$3) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(q+2)^n \cdot \sqrt[q+2]{n}}{n!}$$

**Решение.**

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{9^n \cdot \sqrt[9]{n}}{n!}$$

Используем признак Даламбера:

$$\begin{aligned}D &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{9^{n+1} \cdot \sqrt[9]{n+1}}{(n+1)!} : \frac{9^n \cdot \sqrt[9]{n}}{n!} \right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{9^{n+1} \cdot \sqrt[9]{n+1} \cdot n!}{(n+1)! \cdot 9^n \cdot \sqrt[9]{n}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{9 \cdot \sqrt[9]{n+1}}{(n+1) \cdot \sqrt[9]{n}} = \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{9}{(n+1)} \sqrt[9]{\frac{n+1}{n}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{9}{(n+1)} \sqrt[9]{1 + \frac{1}{n}} = \left( \frac{9}{\infty} \right) = 0 < 1.\end{aligned}$$

Так как  $D = 0 < 1$ , ряд сходится.

$$4) \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{(n+q)(\ln(n+q))^{p-2q}}$$

Расчетно-графическая работа выполнена на сайте МатБюро <https://www.matburo.ru/>

Сделаем на заказ подробно, недорого, ответственно ваши задания:

[https://www.matburo.ru/sub\\_subject.php?p=rgr](https://www.matburo.ru/sub_subject.php?p=rgr)

©МатБюро - Решение задач по математике, экономике, статистике, программированию

**Решение.**

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{(n+7)(\ln(n+7))^{-10}} = \sum_{n=2}^{\infty} \frac{(\ln(n+7))^{10}}{(n+7)}$$

Используем интегральный признак Коши. Рассмотрим несобственный интеграл  $\int_2^{\infty} \frac{(\ln(x+7))^{10}}{(x+7)} dx$ .

Исследуем его сходимость.

$$\begin{aligned} \int_2^{\infty} \frac{(\ln(x+7))^{10}}{(x+7)} dx &= \lim_{A \rightarrow \infty} \int_2^A \frac{(\ln(x+7))^{10}}{(x+7)} dx = \\ &= \lim_{A \rightarrow \infty} \int_2^A (\ln(x+7))^{10} d(\ln(x+7)) = \lim_{A \rightarrow \infty} \left( \frac{1}{11} (\ln(x+7))^{11} \right) \Big|_2^A = \\ &= \frac{1}{11} \lim_{A \rightarrow \infty} \left( (\ln(A+7))^{11} - (\ln(2+7))^{11} \right) = \infty. \end{aligned}$$

Интеграл расходится, значит, исходный ряд также расходится.

$$5) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt[p+2]{n^{q+5}}}$$

**Решение.**

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt[p+2]{n^{q+5}}} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2}$$

Это знакочередующийся ряд. Исследуем на сходимость ряд из модулей  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ . Это обобщенный

гармонический ряд с показателем  $p = 2 > 1$ , поэтому он сходится.

Таким образом, ряд  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2}$  сходится абсолютно.

$$6) \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \left( \frac{n+p}{5n+q} \right)^n$$

**Решение.**

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \left( \frac{n+4}{5n+7} \right)^n$$

Используем радикальный признак Коши для исследования ряда из модулей  $\sum_{n=1}^{\infty} \left( \frac{n+4}{5n+7} \right)^n$  :

$$C = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\left( \frac{n+4}{5n+7} \right)^n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{n+4}{5n+7} \right) = \left( \frac{\infty}{\infty} \right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1+4/n}{5+7/n} = \frac{1}{5} < 1,$$

Поэтому ряд сходится.

Значит, исходный ряд сходится абсолютно.

II Найти интервал сходимости степенного ряда  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\left( x - \frac{q-5}{2} \right)^{2n}}{(p+2)^n}$  и исследовать его на границах

интервала сходимости.

**Решение.**

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x-1)^{2n}}{6^n}$$

Это степенной ряд. Найдем его радиус сходимости:

$$R = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{6^{n+1}}{6^n} = 6, \text{ поэтому ряд сходится абсолютно при}$$

$$|x-1|^2 < 6,$$

$$|x-1| < \sqrt{6},$$

$$-\sqrt{6}+1 < x < \sqrt{6}+1,$$

$$x \in (-\sqrt{6}+1; \sqrt{6}+1).$$

Исследуем сходимость на концах промежутка.

Пусть  $x = \pm\sqrt{6} + 1$ , получаем ряд:  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(\pm\sqrt{6}+1-1)^{2n}}{6^n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(\pm\sqrt{6})^{2n}}{6^n} = \sum_{n=1}^{\infty} 1$ . Этот ряд расходится,

так как его общий член 1 не стремится к нулю.

Таким образом, область сходимости ряда  $x \in (-\sqrt{6}+1; \sqrt{6}+1)$ .

III Разложить в степенной ряд по степеням  $x$  (ряд Маклорена) функцию

$f(x) = x \cdot \ln \left( 1 + \frac{x}{2p+3q} \right)$  и найти интервал сходимости полученного ряда.

**Решение.**

$$f(x) = x \cdot \ln\left(1 + \frac{x}{29}\right).$$

Используем известное разложение:

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \dots + (-1)^{n+1} \frac{x^n}{n} + \dots = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{x^n}{n}, \text{ которое справедливо при } |x| < 1.$$

Получаем:

$$f(x) = x \cdot \ln\left(1 + \frac{x}{29}\right) = x \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{(x/29)^n}{n} = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{x^{n+1}}{n \cdot 29^n}.$$

Это разложение справедливо при  $|x/29| < 1, \Rightarrow |x| < 29, \Rightarrow x \in (-29; 29)$ .

Проверим сходимость на концах интервала.

Положим  $x = -29$ , получим ряд  $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{(-29)^{n+1}}{n \cdot 29^n} = 29 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ . Это гармонический ряд, он

расходится. Пусть  $x = 29$ , получим ряд  $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{(29)^{n+1}}{n \cdot 29^n} = 29 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n}$ . Этот знакопеременный

ряд сходится по признаку Лейбница, так как его общий член  $a_n = \frac{1}{n} \rightarrow 0$  при  $n \rightarrow \infty$  и монотонно

убывает. Область сходимости  $x \in (-29; 29]$ , в точке  $x = 29$  сходимость условная.