

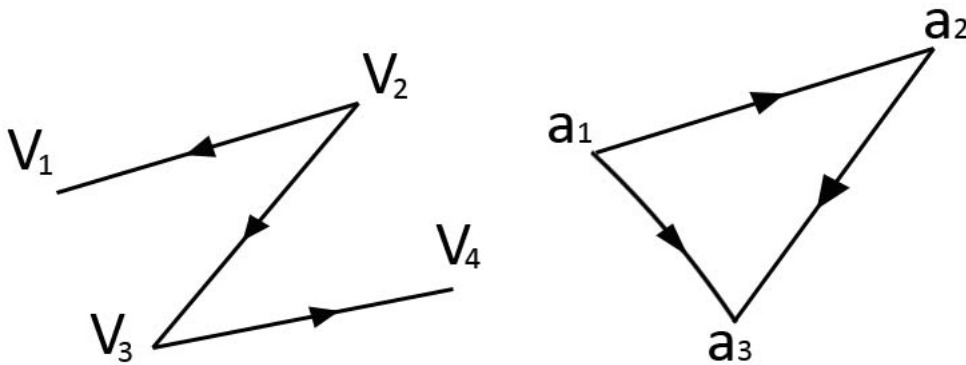
## Расчетно-графическая работа

### Дискретная математика

Вариант 2

**Задача 1.** Найти сумму и объединение графов  $G_1$  и  $G_2$ .

**Решение.** Найдем объединение графов  $G_1$  и  $G_2$ . Так как они заданы на разных множествах вершин, то их объединение имеет вид:



Найдем сумму (декартову сумму) графов  $G_1$  и  $G_2$ . Множество вершин такого графа  $G = G_1 + G_2$  - декартово произведение множества вершин исходных графов  $V(G) = V(G_1) \times V(G_2)$ .

Множество вершин, смежных с вершиной  $(v_i, a_j)$  определяется следующим образом:

$$G(v_i, a_j) = [G_1(v_i) \times a_j] \cup [v_i \times G_2(a_j)]. \text{ Сохраняем направление дуг.}$$

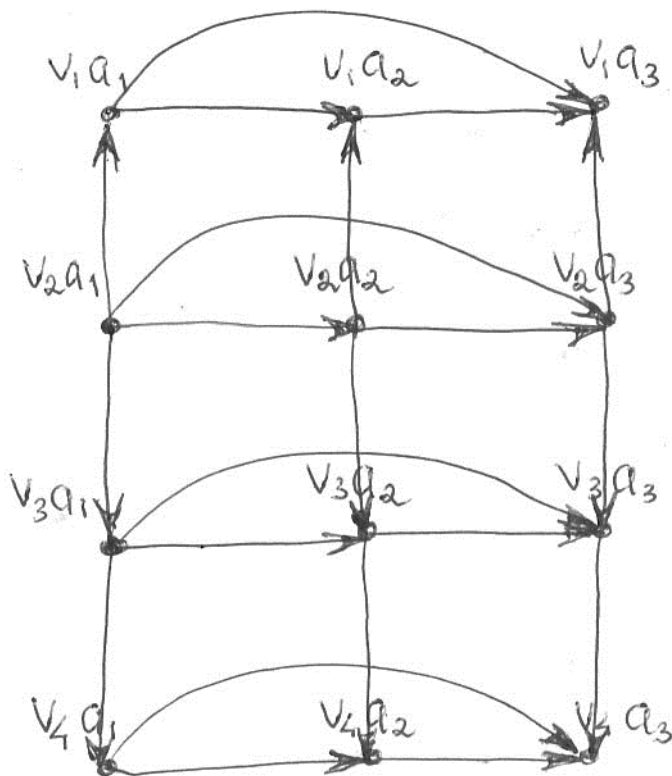
Строим граф:

Расчетно-графическая работа выполнена на сайте МатБюро <https://www.matburo.ru/>

Сделаем на заказ подробно, недорого, ответственно ваши задания:

[https://www.matburo.ru/sub\\_subject.php?p=rgr](https://www.matburo.ru/sub_subject.php?p=rgr)

©МатБюро - Решение задач по математике, экономике, статистике, программированию



**Задача 2.** Решить задачу о назначении минимального выбора:

44	74	35	49	30	45
22	28	42	59	83	41
28	39	54	47	35	24
49	53	45	50	43	38
27	37	30	18	30	22
70	27	21	32	31	9

Расчетно-графическая работа выполнена на сайте МатБюро <https://www.matburo.ru/>

Сделаем на заказ подробно, недорого, ответственно ваши задания:

[https://www.matburo.ru/sub\\_subject.php?p=rgr](https://www.matburo.ru/sub_subject.php?p=rgr)

©МатБюро - Решение задач по математике, экономике, статистике, программированию

**Решение.** Исходная таблица задачи о назначениях:

44	74	35	49	30	45
22	28	42	59	83	41
28	39	54	47	35	24
49	53	45	50	43	38
27	37	30	18	30	22
70	27	21	32	31	9

Решим задачу венгерским методом.

Этап 1. В каждой строке ищем минимальный элемент (выделяем жирным в таблице) и отнимаем от всех элементов строки. Получим:

44	74	35	49	<b>30</b>	45
<b>22</b>	28	42	59	83	41
28	39	54	47	35	<b>24</b>
49	53	45	50	43	<b>38</b>
27	37	30	<b>18</b>	30	22
70	27	21	32	31	<b>9</b>

14	44	5	19	0	15
----	----	---	----	---	----

Расчетно-графическая работа выполнена на сайте МатБюро <https://www.matburo.ru/>

Сделаем на заказ подробно, недорого, ответственно ваши задания:

[https://www.matburo.ru/sub\\_subject.php?p=rgr](https://www.matburo.ru/sub_subject.php?p=rgr)

©МатБюро - Решение задач по математике, экономике, статистике, программированию

0	6	20	37	61	19
4	15	30	23	11	0
11	15	7	12	5	0
9	19	12	0	12	4
61	18	12	23	22	0

Теперь проводим аналогичную процедуру для всех столбцов: ищем наименьший элемент по столбцу и отнимаем его из всех элементов столбца. Получим:

14	44	<b>5</b>	19	<b>0</b>	15
<b>0</b>	<b>6</b>	20	37	61	19
4	15	30	23	11	<b>0</b>
11	15	7	12	5	<b>0</b>
9	19	12	<b>0</b>	12	4
61	18	12	23	22	0

14	38	0	19	0	15
0	0	15	37	61	19
4	9	25	23	11	0
11	9	2	12	5	0
9	13	7	0	12	4
61	12	7	23	22	0

Расчетно-графическая работа выполнена на сайте МатБюро <https://www.matburo.ru/>

Сделаем на заказ подробно, недорого, ответственно ваши задания:

[https://www.matburo.ru/sub\\_subject.php?p=rgr](https://www.matburo.ru/sub_subject.php?p=rgr)

©МатБюро - Решение задач по математике, экономике, статистике, программированию

Задачей является распределение всех подлежащих назначению единиц в клетки с нулевой стоимостью.

Этап 2. Выбираем строку с одним нулем (строка №3), выделяем нуль жирным и зачеркиваем (выделено серым) оставшиеся нулевые значения этого столбца (столбца №6).

Выбираем строку с одним нулевым значением (строка №5), выделяем нуль.

14	38	0	19	0	15
0	0	15	37	61	19
4	9	25	23	11	<b>0</b>
11	9	2	12	5	0
9	13	7	<b>0</b>	12	4
61	12	7	23	22	0

Выбираем столбец с одним нулевым значением (столбец №1), выделяем нуль жирным и зачеркиваем оставшиеся нулевые значения соответствующей строки (строки 2).

Выбираем столбец с одним нулевым значением (столбец №3), выделяем нуль жирным и зачеркиваем оставшиеся нулевые значения соответствующей строки (строки 1).

14	38	<b>0</b>	19	0	15
<b>0</b>	0	15	37	61	19
4	9	25	23	11	<b>0</b>

Расчетно-графическая работа выполнена на сайте МатБюро <https://www.matburo.ru/>

Сделаем на заказ подробно, недорого, ответственно ваши задания:

[https://www.matburo.ru/sub\\_subject.php?p=rgr](https://www.matburo.ru/sub_subject.php?p=rgr)

©МатБюро - Решение задач по математике, экономике, статистике, программированию

11	9	2	12	5	0
9	13	7	<b>0</b>	12	4
61	12	7	23	22	0

Остались нераспределенными два элемента (только четыре нуля выделены жирным, а должно быть шесть).

Этап 3. Зачеркиваем нули минимальным количеством линий.

14	38	0	19	0	15
0	0	15	37	61	19
4	9	25	23	11	0
11	9	2	12	5	0
9	13	7	0	12	4
61	12	7	23	22	0

Из незачеркнутых элементов выбираем минимальный, это 2. Вычитаем его из всех незачеркнутых элементов и прибавляем к элементам на пересечении линий. Получаем

14	38	0	21	0	17
0	0	15	39	61	21
2	7	23	23	9	0
9	7	0	12	3	0
7	11	5	0	10	4

Расчетно-графическая работа выполнена на сайте МатБюро <https://www.matburo.ru/>

Сделаем на заказ подробно, недорого, ответственно ваши задания:

[https://www.matburo.ru/sub\\_subject.php?p=rgr](https://www.matburo.ru/sub_subject.php?p=rgr)

©МатБюро - Решение задач по математике, экономике, статистике, программированию

59	10	5	23	20	0
----	----	---	----	----	---

Этап 4. Повторяем процедуру этапа 2.

Выбираем строку с одним нулем (строка №3), выделяем нуль жирным и зачеркиваем (выделено серым) оставшиеся нулевые значения этого столбца (столбца №6).

Выбираем строку с одним нулевым значением (строка №4), выделяем нуль жирным и зачеркиваем (выделено серым) оставшиеся нулевые значения этого столбца (столбца №3).

Выбираем строку с одним нулевым значением (строка №5), выделяем нуль.

Выбираем строку с одним нулевым значением (строка №1), выделяем нуль.

14	38	0	21	<b>0</b>	17
0	0	15	39	61	21
2	7	23	23	9	<b>0</b>
9	7	<b>0</b>	12	3	0
7	11	5	<b>0</b>	10	4
59	10	5	23	20	0

Выбираем столбец с одним нулевым значением (столбец №1), выделяем нуль жирным и зачеркиваем оставшиеся нулевые значения соответствующей строки (строки 2).

Расчетно-графическая работа выполнена на сайте МатБюро <https://www.matburo.ru/>

Сделаем на заказ подробно, недорого, ответственно ваши задания:

[https://www.matburo.ru/sub\\_subject.php?p=rgr](https://www.matburo.ru/sub_subject.php?p=rgr)

©МатБюро - Решение задач по математике, экономике, статистике, программированию

14	38	0	21	0	17
0	0	15	39	61	21
2	7	23	23	9	0
9	7	0	12	3	0
7	11	5	0	10	4
59	10	5	23	20	0

Осталось распределить один элемент

Этап 5. Зачеркиваем нули минимальным количеством линий.

<del>14</del>	<del>38</del>	<del>0</del>	<del>21</del>	<del>0</del>	<del>17</del>
0	0	15	39	61	21
2	7	23	23	9	0
9	7	0	12	3	0
7	11	5	0	10	4
59	10	5	23	20	0

Из незачеркнутых элементов выбираем минимальный, это 2. Вычитаем его из всех незачеркнутых элементов и прибавляем к элементам на пересечении линий. Получаем

14	38	2	23	0	19
0	0	17	41	61	23
0	5	23	23	7	0
7	5	0	12	1	0



Расчетно-графическая работа выполнена на сайте МатБюро <https://www.matburo.ru/>

Сделаем на заказ подробно, недорого, ответственно ваши задания:

[https://www.matburo.ru/sub\\_subject.php?p=rgr](https://www.matburo.ru/sub_subject.php?p=rgr)

©МатБюро - Решение задач по математике, экономике, статистике, программированию

5	9	5	0	8	4
57	8	5	23	18	0

Этап 6. Повторяем процедуру этапа 2.

Выбираем строку с одним нулем (строка №6), выделяем нуль жирным и зачеркиваем (выделено серым) оставшиеся нулевые значения этого столбца (столбца №6).

Выбираем строку с одним нулем (строка №5), выделяем нуль жирным.

Выбираем строку с одним нулем (строка №4), выделяем нуль жирным.

Выбираем строку с одним нулем (строка №3), выделяем нуль жирным и зачеркиваем (выделено серым) оставшиеся нулевые значения этого столбца (столбца №1).

Выбираем строку с одним нулем (строка №2), выделяем нуль жирным.

Выбираем строку с одним нулем (строка №1), выделяем нуль жирным.

14	38	2	23	<b>0</b>	19
0	<b>0</b>	17	41	61	23
<b>0</b>	5	23	23	7	0
7	5	<b>0</b>	12	1	0
5	9	5	<b>0</b>	8	4
57	8	5	23	18	<b>0</b>

Получили назначения (см. на жирные нули):

Назначить 1-го кандидата на 5-ю должность.

Расчетно-графическая работа выполнена на сайте МатБюро <https://www.matburo.ru/>

Сделаем на заказ подробно, недорого, ответственно ваши задания:

[https://www.matburo.ru/sub\\_subject.php?p=rgr](https://www.matburo.ru/sub_subject.php?p=rgr)

©МатБюро - Решение задач по математике, экономике, статистике, программированию

Назначить 2-го кандидата на 2-ю должность.

Назначить 3-го кандидата на 1-ю должность.

Назначить 4-го кандидата на 3-ю должность.

Назначить 5-го кандидата на 4-ю должность.

Назначить 6-го кандидата на 6-ю должность.

Минимальная величина:  $30+28+28+45+18+9=158$

30

28

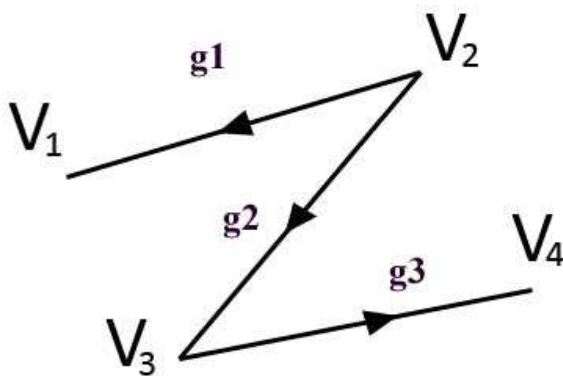
28

45

18

9

**Задача 3.** Построить матрицу смежности и инцидентий для графа  $G_1$ .



**Решение.**

Построим матрицу смежности  $A = ((a_{ij}))$ . Положим  $a_{ij} = 1$  если существует дуга из  $v_i$  в  $v_j$  и  $a_{ij} = 0$  иначе.

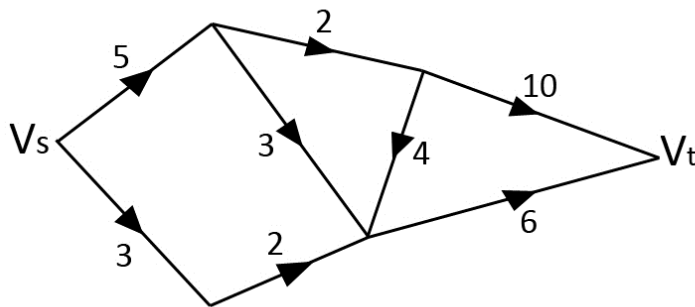
Получим:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Матрица инцидентий  $B = ((b_{ij}))$ , причем  $b_{ij} = 1$  если из вершины  $v_i$  выходит дуга  $g_i$ ,  $b_{ij} = -1$  если в вершину  $v_i$  входит дуга  $g_i$ ,  $b_{ij} = 0$  иначе. Получаем:

$$B = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

**Задача 4.** Найти максимальный поток от вершины  $V_s$  до  $V_t$ .



**Решение.** Найдем максимальный поток в сети по алгоритму Форда-Фалкерсона.

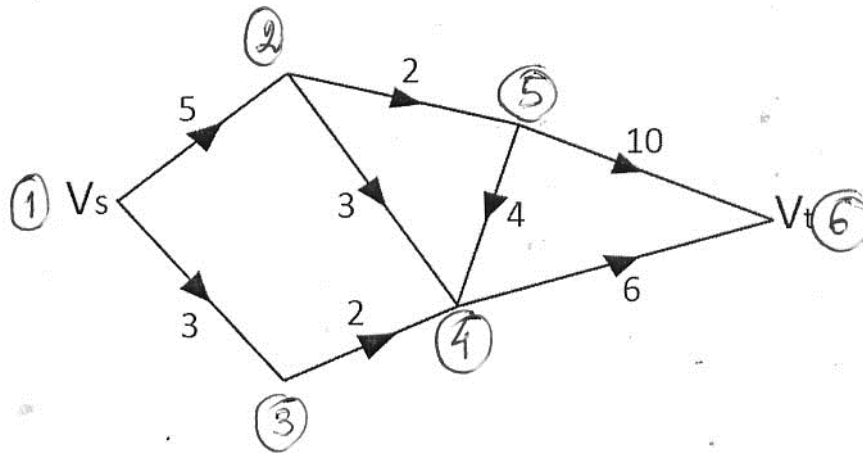
Пронумеруем вершины сети для удобства.

Расчетно-графическая работа выполнена на сайте МатБюро <https://www.matburo.ru/>

Сделаем на заказ подробно, недорого, ответственно ваши задания:

[https://www.matburo.ru/sub\\_subject.php?p=rgr](https://www.matburo.ru/sub_subject.php?p=rgr)

©МатБюро - Решение задач по математике, экономике, статистике, программированию



Шаг 1. Выбираем произвольный поток, например, 1-2-5-6. Его пропускная способность равна минимальной из всех пропускных способностей входящих в него дуг, то есть 2. Уменьшаем пропускные способности дуг этого потока на 2, насыщенную дугу 2-5 вычеркиваем.

Шаг 2. Выбираем произвольный поток, например, 1-2-4-6. Его пропускная способность равна минимальной из всех пропускных способностей входящих в него дуг, то есть 3. Уменьшаем пропускные способности дуг этого потока на 3, насыщенные дуги 1-2, 2-4 вычеркиваем.

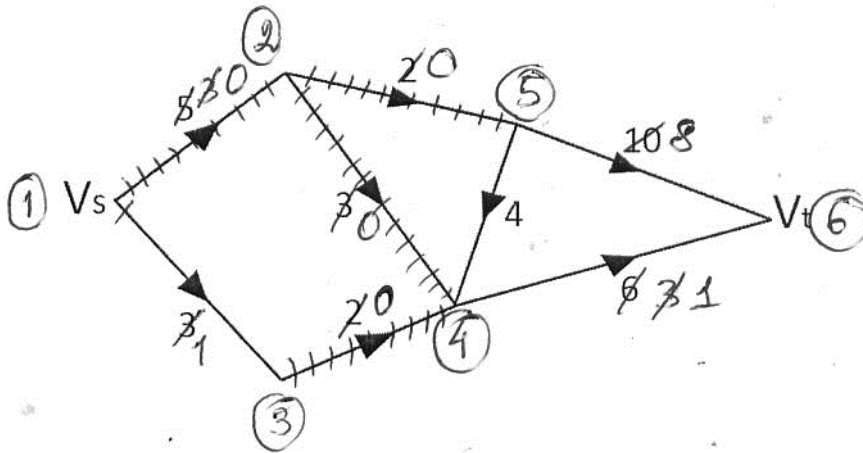
Шаг 3. Выбираем произвольный поток, например, 1-3-4-6. Его пропускная способность равна минимальной из всех пропускных способностей входящих в него дуг, то есть 2. Уменьшаем пропускные способности дуг этого потока на 2, насыщенную дугу 3-4 вычеркиваем.

Расчетно-графическая работа выполнена на сайте МатБюро <https://www.matburo.ru/>

Сделаем на заказ подробно, недорого, ответственно ваши задания:

[https://www.matburo.ru/sub\\_subject.php?p=rgr](https://www.matburo.ru/sub_subject.php?p=rgr)

©МатБюро - Решение задач по математике, экономике, статистике, программированию



Больше свободных путей нет, дальнейшее увеличение потока невозможно, так как при переходе из источника упираемся в насыщенные дуги 1-2 или 3-4.

Максимальный поток равен  $2+3+2=7$ .