Контрольная работа по теме Пределы
РГР №3

Задача. Вычислите пределы, используя 1-й и 2-й замечательные пределы, эквивалентные бесконечно малые, правило Лопиталя.

А) $\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{5x-x^2-4}{x^2-2x-8}$

Решение.

$$\lim_{x\to 4}\frac{5x-x^2-4}{x^2-2x-8}=\left(\frac{20-16-4}{16-8-8}\right)=\left(\frac{0}{0}\right)=$$

Получили неопределенность вида $\frac{0}{0}$. Раскладываем числитель и знаменатель на множители и сокращаем:

$$=\lim_{x\to 4}\frac{-(x-4)(x-1)}{(x-4)(x+2)}=\lim_{x\to 4}\frac{-(x-1)}{(x+2)}=\frac{-3}{6}=-\frac{1}{2}.$$

Б) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2x^3+x-4}{3+x-4x^2}$

Решение.

$$\lim_{x\to\infty}\frac{2x^3+x-4}{3+x-4x^2}=\left(\frac{\infty}{\infty}\right)=$$

Получили неопределенность вида $\frac{\infty}{\infty}$. Старшая степень числителя x^3, знаменателя x^2.

Делим на x^2 числитель и знаменатель:

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{2x+1/x-4/x^2}{3/x^2+1/x-4}=\left(\frac{\infty}{0+0-4}\right)=-\infty.$$

В) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\operatorname{tg}^2 x}{x\cdot\sin 2x}$

Решение.

$$\lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{tg}^2 x}{x\cdot\sin 2x}=\lim_{x\to 0}\frac{\sin^2 x}{x\cdot\sin 2x}\frac{1}{\cos^2 x}=\left(\frac{0}{0}\right)=\lim_{x\to 0}\frac{\sin^2 x}{x^2}\frac{x}{\cos^2 x}\frac{2x}{\sin 2x}\frac{1}{2x}=$$

Используем первый замечательный предел $\frac{\sin t}{t}\to 1,\ t\to 0$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{1}{2\cos^2 x}=\frac{1}{2}.$$

Г) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{5x-1}{5x+4}\right)^{2x+1}$

Решение.

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{5x-1}{5x+4}\right)^{2x+1}=\lim_{x\to\infty}\left(\frac{5x+4-4-1}{5x+4}\right)^{2x+1}=\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{-5}{5x+4}\right)^{2x+1}=\left(1^{\infty}\right)$$

Приводим к второму замечательному пределу $\left(1+\frac{1}{t}\right)^{t}\to e,\ t\to\infty$.

$$=\lim_{x\to\infty}\left(\left(1+\frac{-5}{5x+4}\right)^{\frac{5x+4}{-5}}\right)^{\frac{-5}{5x+4}2x+1}=\lim_{x\to\infty}e^{\frac{-5(2x+1)}{5x+4}}=\lim_{x\to\infty}e^{\frac{-5(2+1/x)}{5+4/x}}=e^{-10/5}=e^{-2}.$$

Д) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{1}{x\sin x}-\frac{1}{x^2}\right)$

Решение.

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{x\sin x}-\frac{1}{x^2}\right)=(\infty-\infty)=\lim_{x\to 0}\left(\frac{x-\sin x}{x^2\sin x}\right)=\left|\sin x\sim x\right|=\lim_{x\to 0}\left(\frac{x-\sin x}{x^3}\right)=$$

Применяем правило Лопиталя:

$$=\lim_{x\to 0}\left(\frac{1-\cos x}{3x^2}\right)=\left(\frac{0}{0}\right)=\lim_{x\to 0}\left(\frac{\sin x}{6x}\right)=\left(\frac{0}{0}\right)=\lim_{x\to 0}\left(\frac{\cos x}{6}\right)=\frac{1}{6}.$$