

Основы дискретной математики и математической логики

Типовой расчет Вариант 15

Задача 1. Найти СДНФ, СКНФ, а также сокращенную, ядровую и все минимальные дизъюнктивные нормальные формы булевой функции $f(x_1, x_2, x_3)$. Функция задана указанием номеров наборов значений переменных, на которых она равна нулю. Наборы нумеруются числами от 0 (набор (0,0,0)) до 7 (набор (1,1,1)).

Наборы: 3, 4, 7.

Решение. Составим таблицу функции $f(x_1, x_2, x_3)$

№	x_1	x_2	x_3	f
0	0	0	0	0
1	0	0	1	0
2	0	1	0	0
3	0	1	1	1
4	1	0	0	1
5	1	0	1	0
6	1	1	0	0
7	1	1	1	1

По таблице найдем совершенные нормальные формы:

$$\text{СДНФ} = \overline{x_1 x_2 x_3} \vee \overline{x_1 x_2 x_3} \vee x_1 x_2 x_3,$$

$$\text{СКНФ} = (x_1 \vee x_2 \vee x_3)(x_1 \vee x_2 \vee \overline{x_3})(x_1 \vee \overline{x_2} \vee x_3)(\overline{x_1} \vee x_2 \vee \overline{x_3})(\overline{x_1} \vee \overline{x_2} \vee x_3).$$

Получим сокращенную дизъюнктивную форму. $N_f = (011, 100, 111)$. Отсюда получаем: $S_1 = \{100\}$, $S_2 = \{011\}$, $S_3 = \{111\}$. Склеиваем конъюнкции (вторую и третью группу по переменной x_1):

S_1	100	-11
S_2	011	
S_3	111	

Получаем $D_{\overline{m} \text{ яд.}} = x_2 x_3 \vee \overline{x_1 x_2 x_3}$

Типовой расчет по алгебре логики. Выполнен на www.MatBuro.ru
 ©МатБюро – Решение заданий математики, экономики, программирования
 Сделаем ваши задания на отлично. http://www.matburo.ru/sub_subject.php?p=al

Далее используем метод Квайна. Строим таблицу, в столбцах элементарные конъюнкции СДНФ, в строках – простые импликанты сокращенной ДНФ.

	$\overline{x_1 x_2 x_3}$	$x_1 \overline{x_2 x_3}$	$x_1 x_2 \overline{x_3}$
$x_2 x_3$			
$\overline{x_1 x_2 x_3}$			

Ставим в ячейке плюс, если простая импликанта покрывает элементарную конъюнкцию. Получаем:

	$\overline{x_1 x_2 x_3}$	$x_1 \overline{x_2 x_3}$	$x_1 x_2 \overline{x_3}$
$x_2 x_3$	+		+
$\overline{x_1 x_2 x_3}$		+	

Выбираем столбцы, содержащие только по одному плюсу (это все столбцы для данной задачи), импликанты строк, соответствующих этим плюсам попадают в ядровую ДНФ, то есть $D_{яд.} = x_2 x_3 \vee \overline{x_1 x_2 x_3}$. Поскольку в ядровую ДНФ вошли все импликанты, она же является минимальной, то есть $D_{i \text{ \textit{el.}}} = x_2 x_3 \vee \overline{x_1 x_2 x_3}$

Задача 2. Двумя способами: с помощью карты Карно и методом Квайна найти сокращенную, ядровую и все минимальные дизъюнктивные нормальные формы булевой функции f , заданной вектором значений. Построить минимальную функциональную (над системой $\{\neg, \&, \vee\}$) и минимальную контактную схемы для функции f .

15 1010111001010100

Решение. Составим таблицу истинности для функции f :

x_1	x_2	x_3	x_4	f
0	0	0	0	1
0	0	0	1	0
0	0	1	0	1
0	0	1	1	0
0	1	0	0	1
0	1	0	1	1

0	1	1	0	1
0	1	1	1	0
1	0	0	0	0
1	0	0	1	1
1	0	1	0	0
1	0	1	1	1
1	1	0	0	0
1	1	0	1	1
1	1	1	0	0
1	1	1	1	0

Выпишем СДНФ функции:

$$x_1 x_2 x_3 x_4 \vee x_1 x_2 x_3 \bar{x}_4 \vee x_1 x_2 x_3 \bar{x}_4 \vee x_1 x_2 x_3 x_4 \vee x_1 x_2 x_3 x_4 \vee x_1 x_2 x_3 x_4 \vee x_1 x_2 x_3 x_4 \vee x_1 x_2 x_3 x_4 \vee x_1 x_2 x_3 x_4 \vee x_1 x_2 x_3 x_4.$$

Выпишем $N_f = \{0000, 0010, 0100, 0101, 0110, 1001, 1011, 1101\}$.

Способ 1. Используем метод карт Карно. Составляем карту Карно для функции 4 переменных. В клетках ставим 1, если на данном наборе функция принимает значение 1 (данный набор присутствует в СДНФ), другие клетки оставляем пустыми. Получаем:

$x_1 x_2 \setminus x_3 x_4$	00	01	11	10
00	1			1
01	1	1		1
11		1		
10		1	1	

Строим сокращенную ДНФ по карте Карно. Склеиваем все соседние пары единиц, а также прямоугольники максимальной величины, получаем:

$x_1 x_2 \setminus x_3 x_4$	00	01	11	10
00	<u>1</u>			<u>1</u>
01	<u>1</u>	<u>1</u>		<u>1</u>
11		<u>1</u>		
10		<u>1</u>	<u>1</u>	

$$D_{\text{ред.}} = \bar{x}_1 \bar{x}_4 \vee \bar{x}_2 \bar{x}_3 x_4 \vee \bar{x}_1 x_3 x_4 \vee x_1 x_2 x_4.$$

Выбираем ядровые импликанты. Им соответствуют такие прямоугольники, после удаления которых получим незакрытую 1. Это 1, 2 и 4 импликанты. 3 импликанта (нижний вертикальный прямоугольник) не является ядровой, так как при удалении этого прямоугольника все единицы остаются закрытыми. Таким образом,

$$D_{\text{яд.}} = \bar{x}_1 \bar{x}_4 \vee \bar{x}_2 \bar{x}_3 x_4 \vee x_1 x_2 x_4$$

Поскольку все ядровые импликанты покрыли все 1 карты Карно, ядровая ДНФ является минимальной, $D_{i \text{ ядр.}} = \overline{x_1} \overline{x_4} \vee \overline{x_2} \overline{x_3} \overline{x_4} \vee \overline{x_1} \overline{x_2} \overline{x_4}$.

Способ 2. Используем метод Квайна. Строим сокращенную ДНФ, используя набор единичных значений $N_f = \{0000, 0010, 0100, 0101, 0110, 1001, 1011, 1101\}$. Выделяем группы:

$$S_0 = \{(0000)\},$$

$$S_1 = \{(0010), (0100)\},$$

$$S_2 = \{(0101), (0110), (1001)\},$$

$$S_3 = \{(1011), (1101)\}.$$

Склеиваем конъюнкции в соседних группах, склеиваются все конъюнкции.

Этап 1.

$$(0000) + (0010) \Rightarrow (00-0) \text{ (использовали)}$$

$$(0000) + (0100) \Rightarrow (0-00) \text{ (использовали)}$$

$$(0010) + (0110) \Rightarrow (0-10) \text{ (использовали)}$$

$$(0100) + (0101) \Rightarrow (010-)$$

$$(0100) + (0110) \Rightarrow (01-0) \text{ (использовали)}$$

$$(0101) + (1101) \Rightarrow (-101)$$

$$(1001) + (1011) \Rightarrow (10-1)$$

$$(1001) + (1101) \Rightarrow (1-01)$$

Этап 2.

$$(00-0) + (01-0) \Rightarrow (0--0)$$

$$(0-00) + (0-10) \Rightarrow (0--0)$$

Итак, получили $D_{\text{ядр.}} = \overline{x_1} \overline{x_4} \vee \overline{x_1} \overline{x_2} \overline{x_3} \vee \overline{x_2} \overline{x_3} \overline{x_4} \vee \overline{x_1} \overline{x_2} \overline{x_4} \vee \overline{x_1} \overline{x_3} \overline{x_4}$.

Строим импликантную таблицу, в столбцах элементарные конъюнкции СДНФ, в строках – простые импликанты сокращенной ДНФ. Ставим в ячейке плюс, если простая импликанта покрывает элементарную конъюнкцию. Получаем:

	$\overline{x_1} \overline{x_2} \overline{x_3} \overline{x_4}$	$\overline{x_1} \overline{x_2} \overline{x_3} x_4$	$\overline{x_1} \overline{x_2} x_3 \overline{x_4}$	$\overline{x_1} \overline{x_2} x_3 x_4$	$x_1 \overline{x_2} \overline{x_3} \overline{x_4}$	$x_1 \overline{x_2} \overline{x_3} x_4$	$x_1 \overline{x_2} x_3 \overline{x_4}$	$x_1 \overline{x_2} x_3 x_4$
$\overline{x_1} \overline{x_4}$ *	+	+	+		+			
$\overline{x_1} \overline{x_2} \overline{x_3}$			+	+				

Типовой расчет по алгебре логики. Выполнен на www.MatBuro.ru
 ©МатБюро – Решение заданий математики, экономики, программирования
 Сделаем ваши задания на отлично. http://www.matburo.ru/sub_subject.php?p=al

$\overline{x_2 x_3 x_4}$				+				+
$\overline{x_1 x_2 x_4}$ *						+	+	
$\overline{x_1 x_3 x_4}$						+		+

Выбираем столбцы, содержащие только по одному плюсу (это столбцы 1, 2, 5, 7), импликанты строк, соответствующих этим плюсам попадают в ядровую ДНФ, то есть $D_{\text{яд.}} = \overline{x_1 x_4} \vee \overline{x_1 x_2 x_3}$ (позначили эти импликанты *). Теперь вычеркиваем строки (отмечаем серой заливкой), соответствующие ядровым импликантам, а затем столбцы, содержащие отмеченные клетки в вычеркнутых строках (это 1, 2, 3, 5, 6, 7 столбцы). Получаем:

	$\overline{x_1 x_2 x_3 x_4}$	$\overline{x_1 x_2 x_3 x_4}$	$\overline{x_1 x_2 x_3 x_4}$	$\overline{x_1 x_2 x_3 x_4}$	$\overline{x_1 x_2 x_3 x_4}$	$\overline{x_1 x_2 x_3 x_4}$	$\overline{x_1 x_2 x_3 x_4}$	$\overline{x_1 x_2 x_3 x_4}$
$\overline{x_1 x_4}$ *	+	+	+		+			
$\overline{x_1 x_2 x_3}$			+	+				
$\overline{x_2 x_3 x_4}$				+				+
$\overline{x_1 x_2 x_4}$ *						+	+	
$\overline{x_1 x_3 x_4}$						+		+

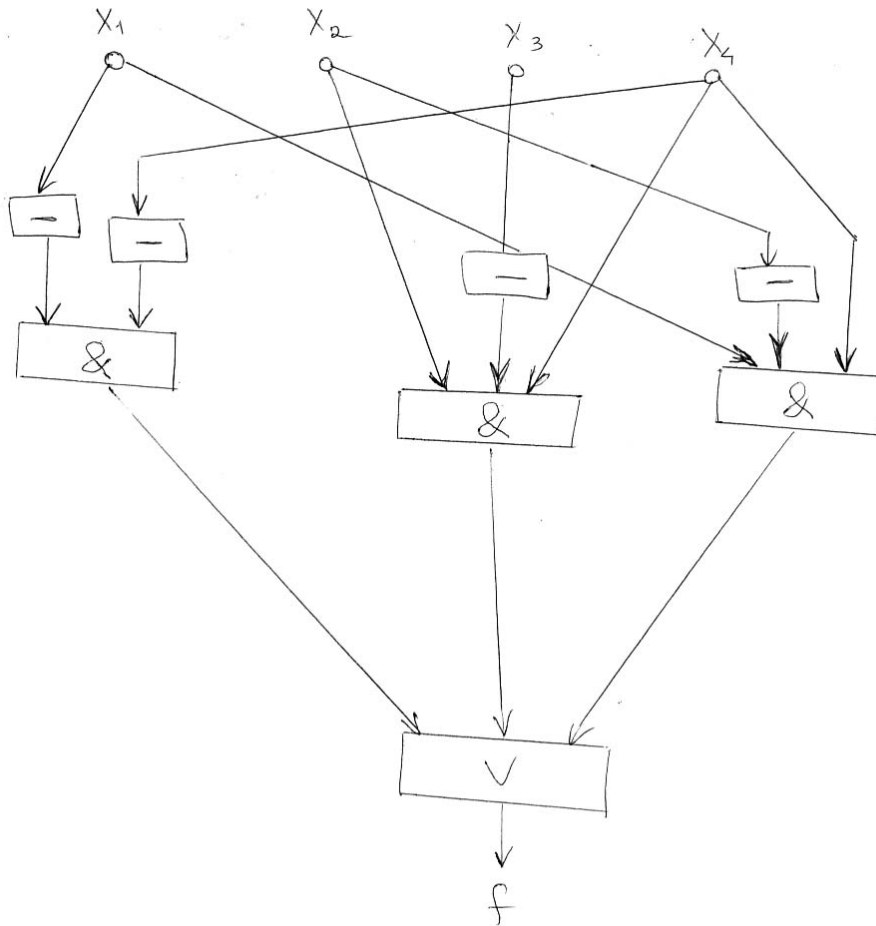
Можно записать результат в виде упрощенной таблицы:

	$\overline{x_1 x_2 x_3 x_4}$	$\overline{x_1 x_2 x_3 x_4}$
$\overline{x_1 x_2 x_3}$	+	
$\overline{x_2 x_3 x_4}$	+	+
$\overline{x_1 x_3 x_4}$		+

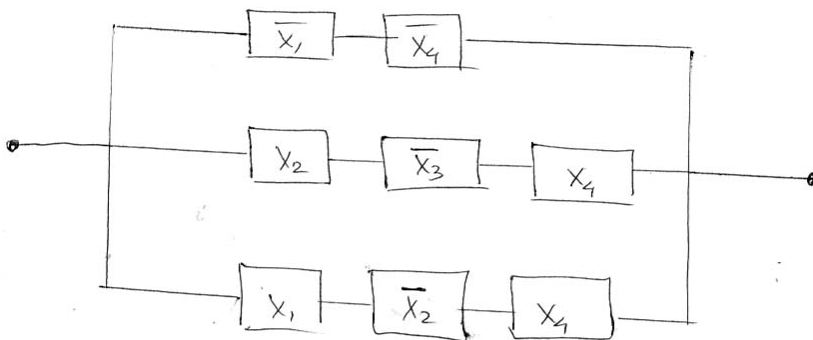
Из таблицы видно, что простой импликант $\overline{x_2 x_3 x_4}$ покрывает две оставшиеся конъюнкции, поэтому можно оставить только его. Искомая минимальная ДНФ имеет вид $D_{\text{и.д.}} = \overline{x_1 x_4} \vee \overline{x_2 x_3 x_4} \vee \overline{x_1 x_2 x_4}$.

Построим минимальную функциональную (над системой $\{\neg, \&, \vee\}$) схему для функции f .

Типовой расчет по алгебре логики. Выполнен на www.MatBuro.ru
 ©МатБюро – Решение заданий математики, экономики, программирования
 Сделаем ваши задания на отлично. http://www.matburo.ru/sub_subject.php?p=al



Построим минимальную контактную схему для функции f .



Задача 3. Проверить полноту системы функций $\Sigma = \{f_i, g_j, h_k\}$. Представить формулами и функциональными схемами над Σ функции 0, 1, \neg , & и \vee .

$$h_1 = (01110001), f_0 = (00111100), g_2 = (10011001).$$

Решение. Составим таблицу истинности для данных функций (индексы уберем для простоты):

№	x_1	x_2	x_3	f	g	h
0	0	0	0	0	1	0
1	0	0	1	0	0	1
2	0	1	0	1	0	1
3	0	1	1	1	1	1
4	1	0	0	1	1	0
5	1	0	1	1	0	0
6	1	1	0	0	0	0
7	1	1	1	0	1	1

Будем использовать **теорему Поста** (о полноте):

Для того чтобы система функций Σ была полной необходимо и достаточно, чтобы она целиком не содержалась ни в одном из пяти замкнутых классов T_0, T_1, S, M, L .

Проверим, каким классам принадлежат (не принадлежат) функции системы Σ .

Класс T_0 : функции, сохраняющие 0. Этому классу не принадлежит g , так как $g(0,0,0) = 1 \neq 0$.

Класс T_1 : функции, сохраняющие 1. Этому классу не принадлежит f , так как $f(1,1,1) = 0 \neq 1$.

Класс S : самодвойственные функции. Этому классу не принадлежит f , так как на противоположных наборах принимает одинаковые значения:
 $f(0,0,0) = f(1,1,1) = 0$.

Класс M : монотонные функции. Этому классу не принадлежит f , так как на сравнимых наборах $(0,1,0) \prec (1,1,0)$ имеем $f(0,1,0) = 1 \not\geq 0 = f(1,1,0)$.

Класс L : линейные функции. Этому классу не принадлежит h , доказательство ниже.

Типовой расчет по алгебре логики. Выполнен на www.MatBuro.ru
 ©МатБюро – Решение заданий математики, экономики, программирования
 Сделаем ваши задания на отлично. http://www.matburo.ru/sub_subject.php?p=al

Покажем нелинейность функции h . Представим ее в виде полинома Жегалкина с неопределенными коэффициентами:

$$h = a_0 \oplus a_1x_1 \oplus a_2x_2 \oplus a_3x_3 \oplus a_4x_1x_2 \oplus a_5x_1x_3 \oplus a_6x_2x_3 \oplus a_7x_1x_2x_3.$$

Подберем коэффициенты, подставляя наборы переменных и значение функции из таблицы истинности. Получаем:

№	x_1	x_2	x_3	h
0	0	0	0	0
1	0	0	1	1
2	0	1	0	1
3	0	1	1	1
4	1	0	0	0
5	1	0	1	0
6	1	1	0	0
7	1	1	1	1

Набор (0,0,0), $0 = a_0$.

Набор (0,0,1), $1 = a_3$.

Набор (0,1,0), $1 = a_2$.

Набор (1,0,0), $0 = a_1$.

Набор (0,1,1), $1 = 1 \oplus 1 \oplus a_6$, $1 = 0 \oplus a_6$, $a_6 = 1$.

Набор (1,0,1), $0 = 1 \oplus a_5$, $a_5 = 1$.

Набор (1,1,0), $0 = 1 \oplus a_4$, $a_4 = 1$.

Набор (1,1,1), $1 = 1 \oplus 1 \oplus 1 \oplus 1 \oplus a_7$, $1 = 1 \oplus a_7$, $a_7 = 0$

Итак, $h = x_2 \oplus x_3 \oplus x_1x_2 \oplus x_1x_3 \oplus x_2x_3$.

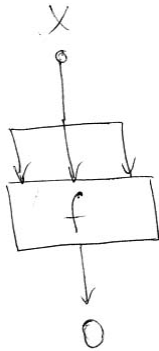
Так как в полиноме содержатся конъюнкции нескольких переменных, функция нелинейна.

Таким образом, по теореме Поста, система функций Σ полна.

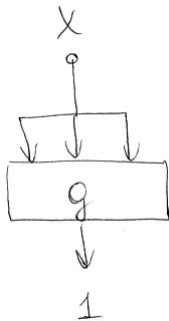
Представим формулами и функциональными схемами над Σ функции 0, 1, \neg , & и \vee .

Функция 0. Так как $f(0,0,0) = f(1,1,1) = 0$, то $0 = f(x, x, x)$.

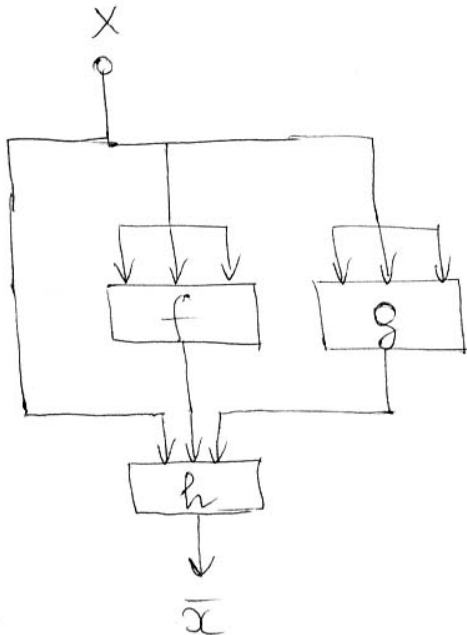
Типовой расчет по алгебре логики. Выполнен на www.MatBuro.ru
 ©МатБюро – Решение заданий математики, экономики, программирования
 Сделаем ваши задания на отлично. http://www.matburo.ru/sub_subject.php?p=al



Функция 1. Так как $g(0,0,0) = g(1,1,1) = 1$, то $1 = g(x,x,x)$.



Функция отрицания \neg . Так как $h(0,0,1) = 1, h(1,0,1) = 0$, то $\bar{x} = h(x,0,1) = h(x, f(x,x,x), g(x,x,x))$.



Функция конъюнкции $\&$.
 Так как

Типовой расчет по алгебре логики. Выполнен на www.MatBuro.ru
 ©МатБюро – Решение заданий математики, экономики, программирования
 Сделаем ваши задания на отлично. http://www.matburo.ru/sub_subject.php?p=al

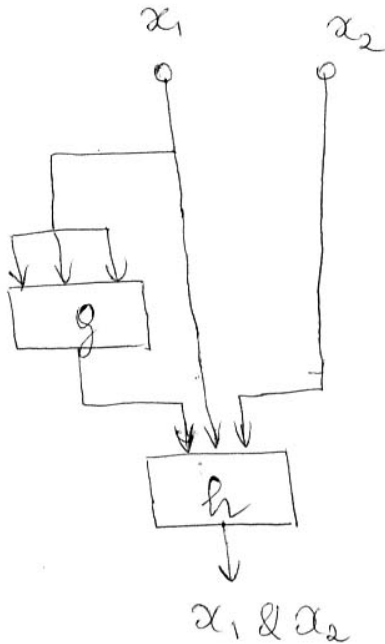
$$h(1,0,0) = 0,$$

$$h(1,0,1) = 0,$$

$$h(1,1,0) = 0,$$

$$h(1,1,1) = 1 ,$$

$$\text{то } x_1 \& x_2 = h(1, x_1, x_2) = h(g(x_1, x_1, x_1), x_1, x_2) = h(g(x_2, x_2, x_2), x_1, x_2)$$



Функция дизъюнкции \vee .

Так как

$$h(0,0,0) = 0,$$

$$h(0,0,1) = 1,$$

$$h(0,1,0) = 1,$$

$$h(0,1,1) = 1 ,$$

$$\text{то } x_1 \vee x_2 = h(0, x_1, x_2) = h(f(x_1, x_1, x_1), x_1, x_2) = h(f(x_2, x_2, x_2), x_1, x_2)$$

Типовой расчет по алгебре логики. Выполнен на www.MatBuro.ru
©МатБюро – Решение заданий математики, экономики, программирования
Сделаем ваши задания на отлично. http://www.matburo.ru/sub_subject.php?p=al

