Задача с решением по уравнению с математической физики
Задача Коши для волнового уравнения

ЗАДАНИЕ.

Решить задачу Коши для волнового уравнения:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad -\infty < x < +\infty, t > 0; \quad u(x,0) = f(x), \frac{\partial u(x,0)}{\partial t} = \varphi(x).$$

$$f(x) = 3^x, \quad \varphi(x) = \sin 2x.$$

РЕШЕНИЕ.

Применим метод Даламбера. Уравнение характеристик имеет вид:

$$dx^2 - a^2 dt^2 = 0.$$

Последнее уравнения распадается на два уравнения, решениями которых являются прямые:

$$x - at = C_1, \; x + at = C_2.$$

Выполняя замену

$$\xi = x + at,$$

$$\eta = x - at,$$

придем к уравнению:

$$u_{\xi\eta} = 0.$$

Общий интеграл последнего уравнения легко получить повторным интегрированием по ξ и по η:

$$u(\xi,\eta) = f_1(\xi) + f_2(\eta).$$

Возвращаясь к старым переменным, получим

$$u(x,t) = f_1(x+at) + f_2(x-at). \qquad (*)$$

Подставляя решение в начальные условия, получим:

$$u\big|_{t=0} = f_1(x) + f_2(x) = 3^x,$$

$$u_t\big|_{t=0} = af_1'(x) - af_2'(x) = \sin 2x.$$

Интегрируя второе равенство, получим

$$f_1(x)-f_2(x)=\frac{1}{a}\int_{x_0}^{x}\sin 2s ds+C=\frac{1}{2a}(\sin 2x-\sin 2x_0)+C,$$

где x_0 и C - постоянные.

Таким образом, получим

$$\begin{cases} f_1(x)+f_2(x)=3^x, \\ f_1(x)-f_2(x)=\dfrac{1}{2a}(\sin 2x-\sin 2x_0)+C. \end{cases}$$

Выразим теперь из последних двух равенств f_1 и f_2

$$f_1(x)=\frac{3^x}{2}+\frac{1}{4a}(\sin 2x-\sin 2x_0)+\frac{C}{2},$$

$$f_2(x)=\frac{3^x}{2}-\frac{1}{4a}(\sin 2x-\sin 2x_0)-\frac{C}{2}.$$

Подставляя полученные выражения в общее решение (*) находим:

$$u(x,t)=f_1(x+at)+f_2(x-at)=$$

$$=\frac{3^{x+at}}{2}+\frac{1}{4a}(\sin 2(x+at)-\sin 2x_0)+\frac{C}{2}+$$

$$+\frac{3^{x-at}}{2}-\frac{1}{4a}(\sin 2(x-at)-\sin 2x_0)-\frac{C}{2}=$$

$$=3^x\left(\frac{3^{at}+3^{-at}}{2}\right)+\frac{1}{4a}\left(\sin(2x+2at)-\sin(2x-2at)\right)=$$

$$=3^x\left(\frac{3^{at}+3^{-at}}{2}\right)+\frac{1}{2a}\left(\sin(2at)\cos(2x)\right).$$

Таким образом, решение поставленной задачи Коши имеет вид:

$$u(x,t)=3^x\left(\frac{3^{at}+3^{-at}}{2}\right)+\frac{1}{2a}\left(\sin(2at)\cos(2x)\right).$$