

## Формула включений-исключений

### Пример решения задачи

**Задача.** Из 100 человек студентов, сдавших сессию, 48 человек сдали экономику, 42 студента – математику и 37 человек – логику. По экономике или математике сдали экзамен 76 человек, по экономике или логике также 76 человек, а по математике или логике – 66 человек. Сколько человек сдали хотя бы один экзамен, если все три предмета сдали 5 человек? Сколько человек не сдали ни одного экзамена? Сколько человек сдали только один экзамен по логике?

**Решение.** Используем принцип включений и исключений. Введем обозначения:

$A_l$  - множество студентов, сдавших логику,

$A_e$  - множество студентов, сдавших экономику,

$A_m$  - множество студентов, сдавших математику.

Получаем по условию:

$N_0 = 100$  - всего студентов.

$N(A_e) = 48$ ,  $N(A_m) = 42$ ,  $N(A_l) = 37$  студентов сдали один из предметов.

$N(A_e \cup A_m) = 76$ ,  $N(A_e \cup A_l) = 76$ ,  $N(A_l \cup A_m) = 66$  студентов сдали хотя бы один из двух предметов.

$N(A_l \cap A_m \cap A_e) = 5$  студентов сдали все три предмета.

Общая формула имеет вид:

$$N' = N_0 - N(A_l) - N(A_m) - N(A_e) + N(A_e \cap A_m) + N(A_e \cap A_l) + N(A_l \cap A_m) - N(A_e \cap A_l \cap A_m).$$

Здесь  $N'$  - число студентов, не сдавших ни один предмет.

Найдем число студентов, сдавших в точности два предмета:

$N(A_l \cap A_m) = N(A_l) + N(A_m) - N(A_l \cup A_m) = 37 + 42 - 66 = 13$  студентов сдали в точности только математику и логику.

$N(A_e \cap A_m) = N(A_e) + N(A_m) - N(A_e \cup A_m) = 48 + 42 - 76 = 14$  студентов сдали в точности только математику и экономику.

$N(A_l \cap A_e) = N(A_l) + N(A_e) - N(A_l \cup A_e) = 37 + 48 - 76 = 9$  студентов сдали в точности только экономику и логику.

Теперь ответим на вопросы задачи.

1) Сколько человек сдали хотя бы один экзамен.

Сначала найдем, сколько человек не сдали ни одного экзамена по основной формуле:

$$N' = 100 - 48 - 42 - 37 + 13 + 14 + 9 - 5 = 4.$$

Значит,  $100 - 4 = 96$  студентов сдали хотя бы один экзамен.

2) Сколько человек не сдали ни одного экзамена.

4 человека (найдено выше).

3) Сколько человек сдали только один экзамен по логике:

$$N_l = N(A_l) - N(A_l \cap A_e) + N(A_l \cap A_m) - N(A_l \cap A_e \cap A_m) = 37 - 13 - 9 + 5 = 20.$$