

Решение задачи: нормально распределенная случайная величина

Задание. Рост мальчиков возрастной группы 15 лет есть нормально распределённая случайная величина X с параметрами $\alpha = 161$ см и $\sigma = 4$ см.

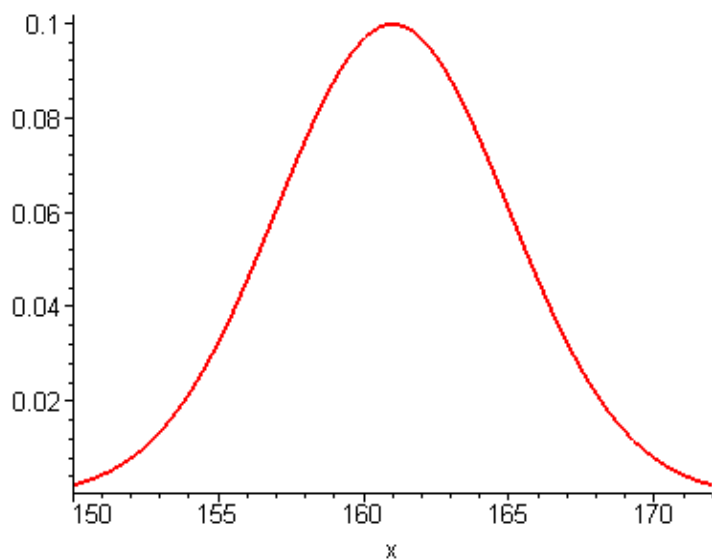
- 1) Найти функцию плотности вероятности случайной величины X и построить её график.
- 2) Какую долю костюмов для мальчиков, имеющих рост от 152 до 158 см, нужно предусмотреть в объёме производства для данной возрастной группы.
- 3) Сформулировать правило трёх сигм для случайной величины X .

Решение.

Плотность распределения нормальной случайной величины X имеет вид:

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}\right) = \frac{1}{4\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{(x-161)^2}{32}\right).$$

Построим график этой функции:



Найдем, какую долю костюмов для мальчиков, имеющих рост от 152 до 158 см, нужно предусмотреть в объёме производства для данной возрастной группы. Используем формулу для нахождения вероятности попадания нормальной случайной величины в интервал:

$P(\alpha < X < \beta) = \Phi\left(\frac{\beta - a}{\sigma}\right) - \Phi\left(\frac{\alpha - a}{\sigma}\right)$, где $\Phi(x)$ - функция Лапласа (значения берутся из таблицы).

Получаем:

$$\begin{aligned} P(152 < X < 158) &= \Phi\left(\frac{158-161}{4}\right) - \Phi\left(\frac{152-161}{4}\right) = \Phi(-0,75) - \Phi(-2,25) = \\ &= -\Phi(0,75) + \Phi(2,25) = -0,2734 + 0,4878 = 0,2144. \end{aligned}$$

То есть доля составит примерно 21,44% от общего числа костюмов.

Сформулируем правило трёх сигм для случайной величины X : доля костюмов для мальчиков 15 лет ростом от 149 до 173 см (см. $[a - 3\sigma; a + 3\sigma] = [161 - 12; 161 + 12] = [149; 173]$) составит 99,73%.