

Решение задачи (экспоненциальное распределение)

Задача. Непрерывная случайная величина ξ распределена по показательному закону с параметром λ , равному номеру варианта 9. Найти плотность распределения случайной величины ξ , функцию распределения, построить графики этих функций. Найти математическое ожидание, дисперсию, среднее квадратическое отклонение случайной величины ξ и вероятность того, что ξ принимает значения, меньшие своего математического ожидания.

Решение. По условию непрерывная случайная величина ξ распределена по показательному закону с параметром $\lambda = 9$.

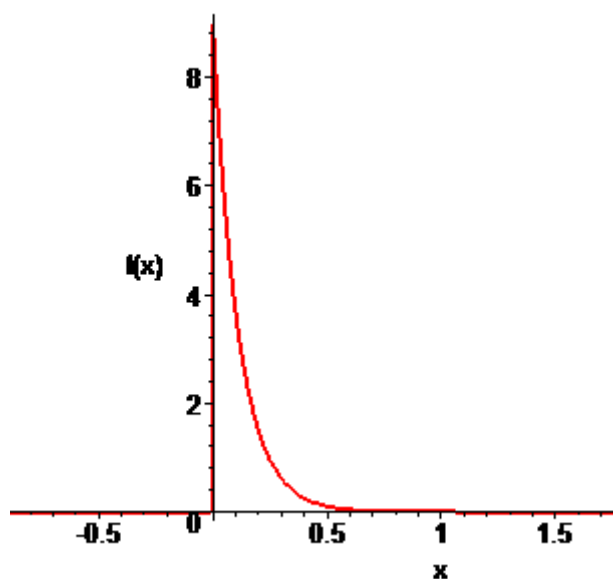
Тогда плотность вероятности имеет вид:

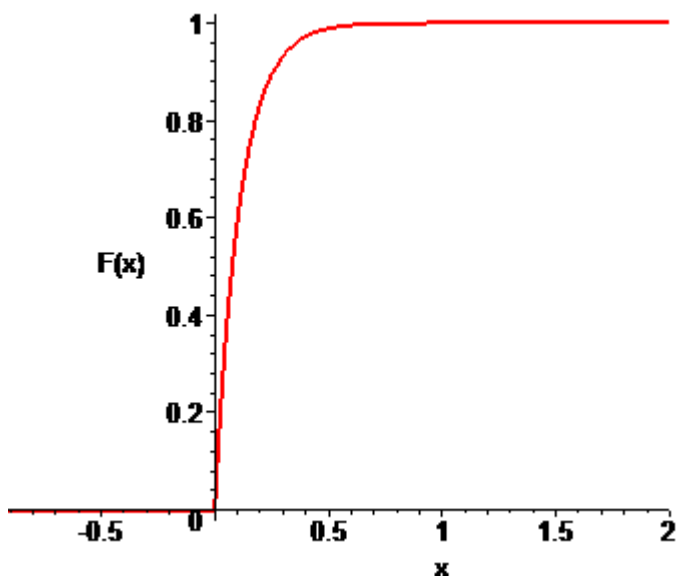
$$f(x) = \begin{cases} 0, & x < 0, \\ 9e^{-9x}, & x \geq 0. \end{cases}$$

Функция распределения имеет вид:

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x < 0, \\ 1 - e^{-9x}, & x \geq 0. \end{cases}$$

Построим графики функций.





Найдем математическое ожидание, дисперсию, среднее квадратическое отклонение случайной величины ξ .

$$a = M(\xi) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)x dx = \int_0^{\infty} x9e^{-9x} dx = \left[-xe^{-9x} - \frac{1}{9}e^{-9x} \right]_0^{\infty} = \frac{1}{9}.$$

Дисперсия

$$\begin{aligned} \sigma^2 = D(\xi) &= \int_{-\infty}^{\infty} f(x)x^2 dx - (M(\xi))^2 = \int_0^{\infty} 9e^{-9x}x^2 dx - \left(\frac{1}{9}\right)^2 = \left[-x^2e^{-9x} - \frac{2x}{9}e^{-9x} - \frac{2}{9^2}e^{-9x} \right]_0^{\infty} - \frac{1}{81} = \\ &= \frac{2}{81} - \frac{1}{81} = \frac{1}{81}. \end{aligned}$$

Среднее квадратическое отклонение случайной величины ξ : $\sigma(\xi) = \sqrt{\frac{1}{81}} = \frac{1}{9}$.

Найдем вероятность того, что ξ принимает значения, меньшие своего математического ожидания.

$$P(0 < \xi < 1/9) = F(1/9) - F(0) = (1 - e^{-9/9}) - (1 - e^0) = 1 - e^{-1} = 0,632.$$