

Решение задачи: биномиальное распределение случайной величины

Задание. Составить закон распределения случайной величины X . Записать функцию распределения, построить её график. Вычислить числовые характеристики $M(X)$, $D(X)$, $\sigma(X)$.

В партии 10% бракованных изделий. Наудачу отобрано 5 изделий. X - число бракованных изделий среди отобранных. Дискретная случайная величина X распределена по биномиальному закону:

Решение. Случайная величина $X =$ (Количество бракованных изделий среди 5 отобранных) распределена по биномиальному закону с параметрами $n=5$ (число изделий), $p=0,1$ (вероятность брака). X может принимать значения 0, 1, 2, 3, 4 и 5.

Найдем соответствующие вероятности по формуле Бернулли:

$$P(X = i) = C_n^i \cdot p^i \cdot (1-p)^{n-i} = C_5^i \cdot 0,1^i \cdot 0,9^{5-i}.$$

Получаем:

$$P(X = 0) = C_5^0 \cdot 0,1^0 \cdot 0,9^5 = 0,59049,$$

$$P(X = 1) = C_5^1 \cdot 0,1^1 \cdot 0,9^4 = 0,32805,$$

$$P(X = 2) = C_5^2 \cdot 0,1^2 \cdot 0,9^3 = 0,0729,$$

$$P(X = 3) = C_5^3 \cdot 0,1^3 \cdot 0,9^2 = 0,0081,$$

$$P(X = 4) = C_5^4 \cdot 0,1^4 \cdot 0,9^1 = 0,00045,$$

$$P(X = 5) = C_5^5 \cdot 0,1^5 \cdot 0,9^0 = 0,00001$$

Закон распределения $X =$ (Количество сбоев при 5 вызовах) имеет вид:

i	0	1	2	3	4	5
$P(X = i)$	0,59049	0,32805	0,0729	0,0081	0,00045	0,00001

Проверим правильность вычислений: $0,59049+0,32805+0,0729+0,0081+0,00045+0,00001=1$.
Верно.

Функция распределения $F(x) = P(X < x)$, то есть

при $x \leq 0$, $F(x) = 0$,

при $0 < x \leq 1$, $F(x) = 0+0,59049=0,59049$,

при $1 < x \leq 2$, $F(x) = 0,59049+0,32805=0,91854$,

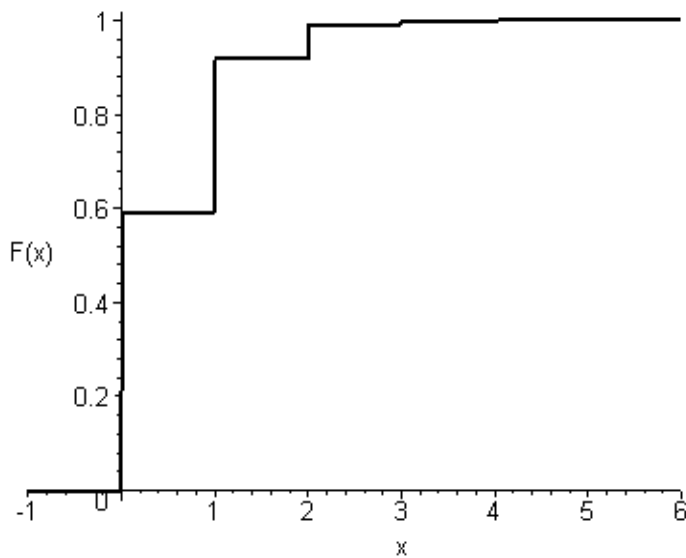
при $2 < x \leq 3$, $F(x) = 0,91854+0,0729 = 0,99144$,

при $3 < x \leq 4$, $F(x) = 0,99144+0,0081 = 0,99954$,

при $4 < x \leq 5$, $F(x) = 0,99954+0,00045=0,99999$,

при $x > 5$, $F(x) = 0,99999+0,00001=1$.

Построим график функции $F(x)$.



Математическое ожидание и дисперсию можно найти по формулам для биномиального распределения:

Математическое ожидание $M(X) = n \cdot p = 5 \cdot 0,1 = 0,5$.

Дисперсия $D(X) = n \cdot p \cdot q = 5 \cdot 0,1 \cdot 0,9 = 0,45$.

Среднее квадратическое отклонение $\sigma = \sqrt{D(X)} = \sqrt{0,45} \approx 0,671$.