

### РЕШЕНИЕ ЗАДАЧ ПО ТЕМЕ: МЕТОД НАИМЕНЬШИХ КВАДРАТОВ

ЗАДАНИЕ. Экспериментальные данные о значениях переменных  $x$  и  $y$  приведены в таблице:

$x_i$	1	2	4	6	8
$y_i$	3	2	1	0,5	0

В результате их выравнивания получена функция  $y = \frac{5}{2x}$ . Используя метод наименьших квадратов, аппроксимировать эти данные линейной зависимостью  $y = ax + b$  (найти параметры  $a$  и  $b$ ). Выяснить, какая из двух линий лучше (в смысле метода наименьших квадратов) выравнивает экспериментальные данные. Сделать чертеж.

РЕШЕНИЕ.

Параметры  $a$  и  $b$  уравнения  $y = ax + b$  по методу наименьших квадратов можно найти из системы уравнений:

$$\begin{cases} a \sum x_i^2 + b \sum x_i = \sum x_i y_i \\ a \sum x_i + b n = \sum y_i \end{cases}$$

где суммирование ведется по  $i$  от 1 до  $n$ ,  $n = 5$ . Составим расчетную таблицу:

						Сумма
$x_i$	1	2	4	6	8	21
$y_i$	3	2	1	0,5	0	6,5
$x_i^2$	1	4	16	36	64	121
$x_i y_i$	3	4	4	3	0	14

Получаем систему:

$$\begin{cases} 121a + 21b = 14, \\ 21a + 5b = 6,5. \end{cases}$$

откуда находим  $a = -0,405$ ,  $b = 3,003$ , то есть получаем функцию  $y = -0,405x + 3,003$ .

Выясним, какая из двух линий лучше (в смысле метода наименьших квадратов) выравнивает экспериментальные данные.

Обозначим  $y_1 = \frac{5}{2x}$ ,  $y_2 = -0,405x + 3,003$ . Вычислим сумму квадратов отклонений в обоих случаях:

						Сумма
$x_i$	1	2	4	6	8	<b>21</b>
$y_i$	3	2	1	0,5	0	<b>6,5</b>
$y_{1i}$	2,500	1,250	0,625	0,417	0,313	<b>5,104</b>
$y_{2i}$	2,598	2,193	1,383	0,573	-0,237	<b>6,510</b>
$(y_i - y_{1i})^2$	0,250	0,563	0,141	0,007	0,098	<b>1,058</b>
$(y_i - y_{2i})^2$	0,162	0,037	0,147	0,005	0,056	<b>0,407</b>

Видно, что так как  $0,407 < 1,058$ , вторая линия (прямая) лучше в смысле метода наименьших квадратов выравнивает данные.

Сделаем чертеж.

