Метод наибольшего правдоподобия для непрерывного распределения

ЗАДАНИЕ.

Методом максимального правдоподобия найти точечную оценку параметра λ по данной выборке

X	1-3	3-5	5-7	7-9	9-11	11-13	13-15	15-17	17-19
n	5	6	7	15	22	27	30	34	35

при условии, что соответствующая непрерывная случайная величина имеет плотность распределения

$$f(x)=\begin{cases}\lambda\exp[\lambda(x-20)], & x\le 20;\\ 0, & x>20.\end{cases}$$

РЕШЕНИЕ.

Всего провели 181 испытание. Полученные 181 результатов разбили на 9 классов, исходя из их попадания в один из 9 промежутков ΔX_i. Обозначим x^i результат, попавший в интервал ΔX_i. Составим функцию правдоподобия:

$$L=\prod_{i=1}^{181} f(x_i)=\prod_{i=1}^{5} f(x^1)\cdot\prod_{i=1}^{6} f(x^2)\cdot\ldots\cdot\prod_{i=1}^{35} f(x^9)=\lambda^{181}\cdot e^{\lambda\cdot(5x^1+6x^2+\ldots+35x^9)-3620\lambda}=$$

$$=\lambda^{181}\cdot e^{\lambda\cdot\sum_{i=1}^{181}x_i-3620\lambda}$$

Найдем логарифмическую функцию правдоподобия:

$$\ln L=181\ln\lambda+\lambda\cdot\sum_{i=1}^{181}x_i-3620\lambda$$

Найдем первую производную по λ:

$$\frac{d\ln L}{d\lambda}=\frac{181}{\lambda}+\sum_{i=1}^{181}x_i-3620$$

Напишем уравнение правдоподобия, для чего приравняем первую производную к нулю:

$$\frac{181}{\lambda}+\sum_{i=1}^{181}x_i-3620=0$$

Найдем критическую точку, для чего решим полученное уравнение относительно λ:

$$\lambda=\frac{181}{3620-\sum_{i=1}^{181}x_i}=\frac{1}{20-\frac{\sum_{i=1}^{181}x_i}{181}}=\frac{1}{20-\overline{x_B}}$$

Найдем вторую производную по λ:

$$\frac{d^2\ln L}{d\lambda^2}=-\frac{181}{\lambda^2}$$

Легко видеть, что при $\lambda = \frac{1}{20-\overline{x_B}}$ вторая производная отрицательна; следовательно, $\lambda = \frac{1}{20-\overline{x_B}}$ - точка максимума и, значит, в качестве оценки максимального правдоподобия параметра λ надо принять величину $\frac{1}{20-\overline{x_B}}$.

Найдем выборочную среднюю. Перейдем к простому вариационному ряду и вычислим:

x_i	2	4	6	8	10	12	14	16	18	**Сумма**
n_i	5	6	7	15	22	27	30	34	35	**181**
$x_i n_i$	10	24	42	120	220	324	420	544	630	**2334**

$$\overline{x_B} = \frac{\sum x_i n_i}{\sum n_i} = \frac{2334}{181} \approx 12,895.$$

Искомая оценка: $\lambda = \frac{1}{20-\overline{x_B}} = \frac{1}{20-12,895} \approx 0,141.$