

Доверительные интервалы для дисперсии и математического ожидания

ЗАДАНИЕ. По группе семей с доходом 154 руб./чел. зафиксированы следующие цифры потребления молока за месяц (на одного человека): 8,3; 8,6; 8,7; 8,8; 9,1; 9,3; 9,4; 13,4; 13,5; 13,8; 13,9; 14,1; 14,3. Найти доверительный интервал для математического ожидания и дисперсии с надежностью $\gamma = 0,95$, дать точность оценки. Выборка произведена из нормальной совокупности.

РЕШЕНИЕ. Найдем числовые выборочные характеристики.

Выборочная средняя:

$$\bar{x} = \frac{1}{n} \sum x_i = \frac{1}{13} 145,2 \approx 11,169.$$

Выборочная дисперсия

$$D_x = \frac{1}{n} \sum (x_i - \bar{x})^2 = \frac{1}{13} 80,628 \approx 6,202.$$

Выборочное среднееквадратичное отклонение:

$$\sigma_x = \sqrt{D_x} = \sqrt{6,202} \approx 2,49.$$

Расчеты в таблице ниже:

x_i	$(x_i - \bar{x})^2$
8,3	8,232
8,6	6,601
8,7	6,097
8,8	5,613
9,1	4,282
9,3	3,494
9,4	3,130
13,4	4,976
13,5	5,432
13,8	6,921
13,9	7,457
14,1	8,589
14,3	9,802
Сумма	145,2 80,628

Полагая, что X имеет нормальное распределение, найдем доверительный интервал для неизвестного математического ожидания генеральной совокупности. Степень надежности считаем равной $\gamma = 0,95$.

Используем формулу:

$$\bar{x} - t_\gamma \frac{\sigma_x}{\sqrt{n}} < a < \bar{x} + t_\gamma \frac{\sigma_x}{\sqrt{n}},$$

где t_γ определяется из таблицы распределения Стьюдента $t_\gamma(13-1; 0,95) = 2,179$.

Получаем после подстановки известных данных:

$$11,169 - 2,179 \frac{2,49}{\sqrt{13}} < a < 11,169 + 2,179 \frac{2,49}{\sqrt{13}},$$

$$9,664 < a < 12,674.$$

Точность оценки:

$$\delta = t_\gamma \frac{\sigma_x}{\sqrt{n}} = 2,179 \frac{2,49}{\sqrt{13}} \approx 1,505$$

Построим доверительный интервал для дисперсии σ^2 . Найдем интервальную оценку (доверительный интервал) для неизвестного среднего квадратического отклонения σ с надежностью 0,95 по известному «исправленному» выборочному среднему квадратическому отклонению из формулы (Гмурман):

$$\sigma_x(1-q) < \sigma < \sigma_x(1+q), q < 1,$$

где q определяется из таблицы по заданным значениям $n = 13$ и $\gamma = 0,95$. В нашем случае $q = 0,52$. Тогда после подстановки получаем:

$$2,49(1-0,52) < \sigma < 2,49(1+0,52),$$

$$1,1952 < \sigma < 3,7848,$$

$$1,429 < \sigma^2 < 14,325.$$