

Тема: Модель Леонтьева

ЗАДАНИЕ.

- *построить таблицу межотраслевого баланса в стоимостном выражении;*
- *найти изменения валовых выпусков при увеличении конечного выпуска первой отрасли на 20%, третьей на 10% и неизменном конечном выпуске второй отрасли;*
- *как следует изменить цены на продукцию отраслей, если поставлены задачи увеличения добавленной стоимости в первой отрасли на 20%, а в третьей на 10%.*

Дана матрица A коэффициентов прямых материальных затрат с компонентами (a_{ij}) и вектор конечного выпуска y с компонентами (y_i) .

Номер варианта	a_{11}	a_{12}	a_{13}	a_{21}	a_{22}	a_{23}	a_{31}	a_{32}	a_{33}	y_1	y_2	y_3
1	0,3	0,4	0,1	0,2	0,2	0,1	0,3	0,2	0,1	100	150	190

РЕШЕНИЕ.

$$A = \begin{pmatrix} 0,3 & 0,4 & 0,1 \\ 0,2 & 0,2 & 0,1 \\ 0,3 & 0,2 & 0,1 \end{pmatrix} - \text{матрица коэффициентов прямых материальных затрат;}$$

$$Y = \begin{pmatrix} 100 \\ 150 \\ 190 \end{pmatrix} - \text{вектор конечного продукта.}$$

Коэффициенты прямых материальных затрат показывают объем материальных ресурсов i -го вида, необходимый для производства единицы валового продукта j -го вида. Матрица A продуктивна, т.к. для всех столбцов сумма элементов меньше единицы.

Уравнение межотраслевого баланса в матричной форме:

$$X = AX + Y, \text{ где } X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} - \text{вектор валового выпуска.}$$

©МатБюро: Качественное решение задач по математике, экономике

Для того, чтобы найти объемы валовой продукции каждой отрасли, перепишем уравнение межотраслевого баланса в следующем виде:

$$X - AX = Y \text{ или } (E - A)X = Y. \text{ Откуда } X = (E - A)^{-1}Y.$$

Находим матрицу $C = E - A$ и обратную к ней матрицу полных затрат

$$B = (E - A)^{-1}.$$

$$C = E - A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0,3 & 0,4 & 0,1 \\ 0,2 & 0,2 & 0,1 \\ 0,3 & 0,2 & 0,1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,7 & -0,4 & -0,1 \\ -0,2 & 0,8 & -0,1 \\ -0,3 & -0,2 & 0,9 \end{pmatrix}$$

Определитель этой матрицы

$$\begin{aligned} \det C &= \begin{vmatrix} 0,7 & -0,4 & -0,1 \\ -0,2 & 0,8 & -0,1 \\ -0,3 & -0,2 & 0,9 \end{vmatrix} = 0,001 \cdot \begin{vmatrix} 7 & -4 & -1 \\ -2 & 8 & -1 \\ -3 & -2 & 9 \end{vmatrix} = \\ &= 0,001 \cdot \left\{ 7 \cdot \begin{vmatrix} 8 & -1 \\ -2 & 9 \end{vmatrix} - (-4) \cdot \begin{vmatrix} -2 & -1 \\ -3 & 9 \end{vmatrix} - 1 \cdot \begin{vmatrix} -2 & 8 \\ -3 & -2 \end{vmatrix} \right\} = \\ &= 0,001 \cdot \{ 7(72 - 2) + 4(-18 - 3) - (4 + 24) \} = 0,001 \cdot (490 - 84 - 28) = 0,378. \end{aligned}$$

Алгебраические дополнения элементов матрицы $C = E - A$:

$$\begin{aligned} c_{11} &= \begin{vmatrix} 0,8 & -0,1 \\ -0,2 & 0,9 \end{vmatrix} = 0,72 - 0,02 = 0,70; & c_{12} &= - \begin{vmatrix} -0,2 & -0,1 \\ -0,3 & 0,9 \end{vmatrix} = -(-0,18 - 0,03) = 0,21; \\ c_{13} &= \begin{vmatrix} -0,2 & 0,8 \\ -0,3 & -0,2 \end{vmatrix} = 0,04 + 0,24 = 0,28; & c_{21} &= - \begin{vmatrix} -0,4 & -0,1 \\ -0,2 & 0,9 \end{vmatrix} = -(-0,36 - 0,02) = 0,38; \\ c_{22} &= \begin{vmatrix} 0,7 & -0,1 \\ -0,3 & 0,9 \end{vmatrix} = 0,63 - 0,03 = 0,60; & c_{23} &= - \begin{vmatrix} 0,7 & -0,4 \\ -0,3 & -0,2 \end{vmatrix} = -(-0,14 - 0,12) = 0,26; \\ c_{31} &= \begin{vmatrix} -0,4 & -0,1 \\ 0,8 & -0,1 \end{vmatrix} = 0,04 + 0,08 = 0,12; & c_{32} &= - \begin{vmatrix} 0,7 & -0,1 \\ -0,2 & -0,1 \end{vmatrix} = -(-0,07 - 0,02) = 0,09; \\ c_{33} &= \begin{vmatrix} 0,7 & -0,4 \\ -0,2 & 0,8 \end{vmatrix} = 0,56 - 0,08 = 0,48. \end{aligned}$$

Обратная матрица, представляющая собой таблицу коэффициентов полных затрат, будет следующей:

Еще больше примеров задач на сайте www.MatBuro.ru

©МатБюро: Качественное решение задач по математике, экономике

$$B = (E - A)^{-1} = \frac{1}{0,378} \begin{pmatrix} 0,70 & 0,38 & 0,12 \\ 0,21 & 0,60 & 0,09 \\ 0,28 & 0,26 & 0,48 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1,85 & 1,01 & 0,32 \\ 0,56 & 1,59 & 0,24 \\ 0,74 & 0,69 & 1,27 \end{pmatrix}$$

Находим объемы валовой продукции каждой отрасли:

$$X = (E - A)^{-1} Y = \begin{pmatrix} 1,85 & 1,01 & 0,32 \\ 0,56 & 1,59 & 0,24 \\ 0,74 & 0,69 & 1,27 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 100 \\ 150 \\ 190 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 396,30 \\ 338,89 \\ 418,52 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}.$$

Межотраслевые поставки найдём по формуле $x_{ij} = a_{ij} \cdot x_j$ ($i, j = 1, 2, 3$).

Таблица межотраслевого баланса в стоимостном выражении

Отрасли-производители	Отрасли - потребители			Конечный продукт Y	Валовый продукт X
	1	2	3		
1	118,89	135,56	41,85	100	396,30
2	79,26	67,78	41,85	150	338,89
3	118,89	67,78	41,85	190	418,52
Чистая продукция (добавленная стоимость), Z	79,26	67,78	292,96		
Валовый продукт X	396,30	338,89	418,52		

Находим изменения валовых выпусков при увеличении конечного выпуска первой отрасли на 20%, третьей на 10% и неизменном конечном выпуске второй отрасли.

По условию вектор конечного потребления теперь будет следующим:

$$Y = \begin{pmatrix} 100 \cdot 1,2 \\ 150 \\ 190 \cdot 1,1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 120 \\ 150 \\ 209 \end{pmatrix}$$

$$\text{Валовый выпуск } X = B \cdot Y = \begin{pmatrix} 1,85 & 1,01 & 0,32 \\ 0,56 & 1,59 & 0,24 \\ 0,74 & 0,69 & 1,27 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 120 \\ 150 \\ 209 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 439,37 \\ 354,52 \\ 457,46 \end{pmatrix}.$$

©МатБюро: Качественное решение задач по математике, экономике

Следовательно, валовый выпуск продукции в 1-ой отрасли надо увеличить с 396,30 до 439,37, т.е. на 10,87%; во 2-ой отрасли – увеличить с 338,89 до 354,52, т.е. на 4,61%; в 3-ей отрасли – увеличить с 418,52 до 457,46, т.е. на 9,30%.

Анализируем изменение цены на продукцию отраслей, если поставлены задачи увеличения добавленной стоимости в первой отрасли на 20%, а в третьей на 10%.

Модель равновесных цен $D = B^{\circ} \cdot V$, где

$$P = \begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \\ p_3 \end{pmatrix} - \text{вектор цен;}$$

$$V = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} - \text{доля добавленной стоимости, } v_j = \frac{z_j}{x_j};$$

$$B^T = \begin{pmatrix} 1,85 & 0,56 & 0,74 \\ 1,01 & 1,59 & 0,69 \\ 0,32 & 0,24 & 1,27 \end{pmatrix} - \text{матрица, транспонированная к матрице } B.$$

Матрица B^T является ценовым матричным мультипликатором (матричным мультипликатором ценового эффекта распространения).

Эффект распространения ΔP , вызванный изменением доли добавленной стоимости на ΔV может быть рассчитан из как $\Delta P = B^T \cdot \Delta V$.

$$v_1 = \frac{z_1}{x_1} = \frac{79,26}{396,30} = 0,20; \quad v_2 = \frac{z_2}{x_2} = \frac{67,78}{338,89} = 0,20; \quad v_3 = \frac{z_3}{x_3} = \frac{292,96}{418,52} = 0,70$$

$$V = \begin{pmatrix} 0,20 \\ 0,20 \\ 0,70 \end{pmatrix}; \quad \Delta V = \begin{pmatrix} 0,20 \cdot 0,2 \\ 0 \\ 0,70 \cdot 0,1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,04 \\ 0 \\ 0,07 \end{pmatrix};$$

$$\Delta P = B^T \cdot \Delta V = \begin{pmatrix} 1,85 & 0,56 & 0,74 \\ 1,01 & 1,59 & 0,69 \\ 0,32 & 0,24 & 1,27 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0,04 \\ 0 \\ 0,07 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,126 \\ 0,088 \\ 0,102 \end{pmatrix}$$

Еще больше примеров задач на сайте www.MatBuro.ru

©МатБюро: Качественное решение задач по математике, экономике

Следовательно, для увеличения добавленной стоимости в первой отрасли на 20%, а в третьей на 10% надо увеличить цены в первой отрасли на 12,6%, во второй отрасли на 8,8%, а в третьей – на 10,2%.