

## Многокритериальная оптимизация, пример решения

### ЗАДАНИЕ.

Полуфабрикаты поступают на предприятие в виде листов фанеры. Всего имеется две партии материала, причем первая партия содержит 400 листов, а вторая 250 листов фанеры. Из поступающих листов фанеры необходимо изготовить комплекты двух видов. Комплект первого вида включает 4 детали 1-го типа, 3 детали 2-го типа и 2 детали 3-го типа. Комплект второго вида включает 2 детали 1-го типа, 4 детали 2-го типа и 3 детали 3-го типа. Лист фанеры каждой партии может раскраиваться различными способами. Количество деталей каждого типа, которое получается при раскрое одного листа соответствующей партии по тому или иному способу раскроя, представлено в следующей таблице. Стоимость одного листа первой партии составляет 1000 руб., а стоимость одного листа второй партии – 1200 руб. Цена комплекта первого вида составляет 150 руб., цена комплекта второго вида – 200 руб.

Детали	Способ раскроя (1 п)			Детали	Способ раскроя (2 п)	
	1	2	3		1	2
1	0	6	9	1	6	5
2	4	3	4	2	5	4
3	10	16	0	3	8	0

Необходимо решить многокритериальную задачу.

Критерий 1. Максимизация прибыли от продажи всех комплектов деталей.

Критерий 2. Максимизация количества комплектов первого вида.

Критерий 3. Максимизация количества комплектов второго вида.

Примечание: для построения Парето-оптимального множества рассмотреть только критерии 2,3.

### РЕШЕНИЕ.

Решение.

Переменные задачи:

$x_1$  – количество листов 1 партии, раскраиваемых по 1 способу

$x_2$  – количество листов 1 партии, раскраиваемых по 2 способу

$400 - x_1 - x_2$  – количество листов 1 партии, раскраиваемых по 3 способу

$x_3$  – количество листов 2 партии, раскраиваемых по 1 способу

$250 - x_3$  – количество листов 2 партии, раскраиваемых по 2 способу

$$x_1, x_2, x_3 \geq 0$$

ограничения:  $x_1 + x_2 \leq 400$

$$x_3 \leq 250$$

Стоимости листов:  $400 \cdot 1000 + 250 \cdot 1200 = 700\,000$  руб.

На основе переменных вариантов раскроя находим, сколько мы получаем деталей каждого типа:

1 тип:  $0x_1 + 6x_2 + 9(400 - x_1 - x_2) + 6x_3 + 5(250 - x_3) = 4850 - 9x_1 - 3x_2 + x_3$

2 тип:  $4x_1 + 3x_2 + 4(400 - x_1 - x_2) + 5x_3 + 4(250 - x_3) = 2600 - x_2 + x_3$

3 тип:  $10x_1 + 16x_2 + 0(400 - x_1 - x_2) + 8x_3 + 0(250 - x_3) = 10x_1 + 16x_2 + 8x_3$

Далее из этих деталей составляем комплекты 1 и 2 видов.

вводим дополнительные переменные

$x_4$  – количество комплектов 1 вида

$x_5$  – количество комплектов 2 вида

Тогда для их изготовления нужно деталей:

1 тип:  $4x_4 + 2x_5$

2 тип:  $3x_4 + 4x_5$

3 тип:  $2x_4 + 3x_5$

Ограничение по количеству деталей:

1 тип:  $4x_4 + 2x_5 = 4850 - 9x_1 - 3x_2 + x_3$

2 тип:  $3x_4 + 4x_5 = 2600 - x_2 + x_3$

3 тип:  $2x_4 + 3x_5 = 10x_1 + 16x_2 + 8x_3$

Далее находим выражения целевых функций:

Критерий 1. Максимизация прибыли от продажи всех комплектов деталей.

$$F_1 = 150x_4 + 200x_5 - 700000 \rightarrow \max$$

Критерий 2. Максимизация количества комплектов первого вида.

$$F_2 = x_4 \rightarrow \max$$

Критерий 3. Максимизация количества комплектов второго вида.

$$F_3 = x_5 \rightarrow \max$$

Математическая модель задачи:

$$F_1 = 150x_4 + 200x_5 - 700000 \rightarrow \max$$

$$F_2 = x_4 \rightarrow \max$$

$$F_3 = x_5 \rightarrow \max$$

$$\begin{cases} x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 \geq 0 \\ x_1 + x_2 \leq 400 \\ x_3 \leq 250 \\ 4x_4 + 2x_5 = 4850 - 9x_1 - 3x_2 + x_3 \\ 3x_4 + 4x_5 = 2600 - x_2 + x_3 \\ 2x_4 + 3x_5 = 10x_1 + 16x_2 + 8x_3 \end{cases}$$

или

$$F_1 = 150x_4 + 200x_5 - 700000 \rightarrow \max$$

$$F_2 = x_4 \rightarrow \max$$

$$F_3 = x_5 \rightarrow \max$$

$$\begin{cases} x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 \geq 0 \\ x_1 + x_2 \leq 400 \\ x_3 \leq 250 \\ 9x_1 + 3x_2 - x_3 + 4x_4 + 2x_5 = 4850 \\ x_2 - x_3 + 3x_4 + 4x_5 = 2600 \\ -10x_1 - 16x_2 - 8x_3 + 2x_4 + 3x_5 = 0 \end{cases}$$

Определяем тип компромиссного решения – поскольку все критерии максимизируются, то компромиссный критерий:

$$F = \sum w_i F_i \rightarrow \max$$

Решаем задачу в Excel для разных весовых коэффициентов.

Заносим данные.

Задача по многокритериальной оптимизации скачана с

[https://www.matburo.ru/ex\\_mp.php?p1=mpmkop](https://www.matburo.ru/ex_mp.php?p1=mpmkop)

(больше примеров по ссылке)

©МатБюро - Решение задач по математике, экономике, статистике, программированию

F15		fx		=СУММПРОИЗВ(F10:F12;B14:B16)				
	A	B	C	D	E	F	G	H
1	$x_1$	$x_2$	$x_3$	$x_4$	$x_5$			
2								
3								
4	1	1	0	0	0	0	≤	400
5	0	0	1	0	0	0	≤	250
6	9	3	-1	4	2	0	=	4850
7	0	1	-1	3	4	0	=	2600
8	-10	-16	-8	2	3	0	=	0
9								
10	0	0	0	150	200	-700000		$F_1$
11	0	0	0	1	0	0		$F_2$
12	0	0	0	0	1	0		$F_3$
13								
14	$w_1$	0,5						
15	$w_2$	0,3			F	-350000		
16	$w_3$	0,2						
17								

Решаем задачу для

$w_1$	0,5
$w_2$	0,3
$w_3$	0,2

получаем

	$x_1$	$x_2$	$x_3$	$x_4$	$x_5$			
	157	3	16	855	12			
1	1	0	0	0	0	160	≤	400
0	0	1	0	0	0	16	≤	250
9	3	-1	4	2	0	4850	=	4850
0	1	-1	3	4	0	2600	=	2600
-10	-16	-8	2	3	0	0	=	0
0	0	0	150	200	-569350			$F_1$
0	0	0	1	0	855			$F_2$
0	0	0	0	1	12			$F_3$
$w_1$	0,5							
$w_2$	0,3			F	-284416			
$w_3$	0,2							

у нас получается отрицательная прибыль

проверим решение вручную

$x_1 = 157$  – количество листов 1 партии, раскраиваемых по 1 способу

$x_2 = 3$  – количество листов 1 партии, раскраиваемых по 2 способу

$400 - x_1 - x_2 = 240$  – количество листов 1 партии, раскраиваемых по 3 способу

$x_3 = 16$  – количество листов 2 партии, раскраиваемых по 1 способу

$250 - x_3 = 234$  – количество листов 2 партии, раскраиваемых по 2 способу

Стоимости листов:  $400 * 1000 + 250 * 1200 = 700\ 000$  руб.

На основе переменных вариантов раскроя находим, сколько мы получаем деталей каждого типа:

1 тип:  $0 * 157 + 6 * 3 + 9 * 240 + 6 * 16 + 5 * 234 = 3444$ .

2 тип:  $4 * 157 + 3 * 3 + 4 * 240 + 5 * 16 + 4 * 234 = 2613$

3 тип:  $10 * 157 + 16 * 3 + 0 * 240 + 8 * 16 + 0 * 234 = 1746$

Далее из этих деталей составляем комплекты 1 и 2 видов.

$x_4 = 855$  – количество комплектов 1 вида

$x_5 = 12$  – количество комплектов 2 вида

Тогда для их изготовления нужно деталей:

1 тип:  $4 * 855 + 2 * 12 = 3444$

2 тип:  $3 * 855 + 4 * 12 = 2613$

3 тип:  $2 * 855 + 3 * 12 = 1746$

Все совпадает.

Выручка:  $150 * 855 + 200 * 12 = 130650$ .

Выручка 130650 действительно меньше затрат 700000, прибыль отрицательная.

Задача по многокритериальной оптимизации скачана с  
[https://www.matbuero.ru/ex\\_mp.php?p1=mpmkop](https://www.matbuero.ru/ex_mp.php?p1=mpmkop)

(больше примеров по ссылке)

©МатБюро - Решение задач по математике, экономике, статистике, программированию

Решим задачу в Maple

```
> with(simplex);
z := 0.5 · (150 · x4 + 200 · x5 - 700000) + 0.3 · x4 + 0.2 · x5;
maximize(z, {x1 + x2 ≤ 400, x3 ≤ 250, 9 · x1 + 3 · x2 - x3 + 4 · x4 + 2 · x5 = 4850,
x2 - x3 + 3 · x4 + 4 · x5 = 2600, -10 · x1 - 16 · x2 - 8 · x3 + 2 · x4 + 3 · x5 = 0},
NONNEGATIVE);
subs(%z);
[basis, convexhull, cterm, define_zero, display, dual, feasible, maximize, minimize,
pivot, pivoteqn, pivotvar, ratio, setup, standardize]

z := 75.3 x4 + 100.2 x5 - 3.500000 105
{x1 = 7175/47, x2 = 0, x3 = 1325/47, x4 = 41175/47, x5 = 0}
-2.840323936 105
```

Maple дает только нецелочисленный результат, что нам не подходит.

Далее решаем задачу для различных весов.

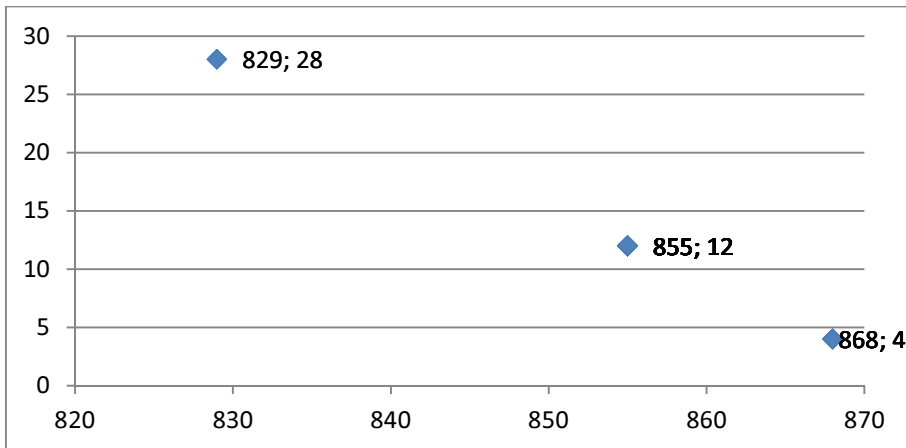
Составляем сводную таблицу.

$w_1$	$w_2$	$w_3$	$x_1$	$x_2$	$x_3$	$x_4$	$x_5$	$F_1$	$F_2$	$F_3$	$F$
0	0	1	163	5	4	829	28	-570050	829	28	28
0	0,2	0,8	163	5	4	829	28	-570050	829	28	188,2
0	0,4	0,6	154	2	22	868	4	-569000	868	4	349,6
0	0,6	0,4	154	2	22	868	4	-569000	868	4	522,4
0	0,8	0,2	154	2	22	868	4	-569000	868	4	695,2
0	1	0	154	2	22	868	4	-569000	868	4	868
0,2	0	0,8	157	3	16	855	12	-569350	855	12	-113860
0,2	0,2	0,6	157	3	16	855	12	-569350	855	12	-113692
0,2	0,4	0,4	157	3	16	855	12	-569350	855	12	-113523
0,2	0,6	0,2	157	3	16	855	12	-569350	855	12	-113355
0,2	0,8	0	154	2	22	868	4	-569000	868	4	-113106
0,4	0	0,6	157	3	16	855	12	-569350	855	12	-227733
0,4	0,2	0,4	157	3	16	855	12	-569350	855	12	-227564
0,4	0,4	0,2	157	3	16	855	12	-569350	855	12	-227396
0,4	0,6	0	157	3	16	855	12	-569350	855	12	-227227
0,6	0	0,4	157	3	16	855	12	-569350	855	12	-341605
0,6	0,2	0,2	157	3	16	855	12	-569350	855	12	-341437
0,6	0,4	0	157	3	16	855	12	-569350	855	12	-341268
0,8	0	0,2	157	3	16	855	12	-569350	855	12	-455478
0,8	0,2	0	157	3	16	855	12	-569350	855	12	-455309
1	0	0	157	3	16	855	12	-569350	855	12	-569350

Изобразим множество допустимых значений критериев в координатах  $F_2, F_3$ .

Задача по многокритериальной оптимизации скачана с  
[https://www.matburo.ru/ex\\_mp.php?p1=mpmkop](https://www.matburo.ru/ex_mp.php?p1=mpmkop)  
(больше примеров по ссылке)

©МатБюро - Решение задач по математике, экономике, статистике, программированию



Есть всего 3 точки, которые неоднократно повторяются в решениях.  
(829,28), (855,12), (868,4).

Эти 3 точки и составляют Парето-оптимальное множество решений.