Задача.

Исследовать функцию $y=\begin{cases}-1{,}5\sqrt[3]{(x-1)^2}-1{,}5x+1{,}5, & x\le 2\\ \dfrac{2}{x-2}+x-2, & x>2\end{cases}$.

Построить эскиз графика функции.

Решение.

1) Область определения функции: $x\in(-\infty;+\infty)$.

2) Асимптоты.

а) Вертикальные асимптоты: исследуем точку $x=2$:

$$\lim_{x\to 2-0} y = 1{,}5\lim_{x\to 2-0}\left(-\sqrt[3]{(x-1)^2}-x+1\right)=-3,\ \lim_{x\to 1+0} y=\lim_{x\to 2+0}\left(\frac{2}{x-2}+x-2\right)=+\infty,$$

$x=2$ – вертикальная асимптота.

b) Наклонные асимптоты: $y=kx+b$ – общее уравнение наклонных асимптот:

$$k=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{y}{x}=\left[\begin{array}{l}1{,}5\lim\limits_{x\to-\infty}\left(-1+\dfrac{-\sqrt[3]{(x-1)^2}+1}{x}\right)=-1{,}5\\ \lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{2}{x^2-2x}+1-\dfrac{2}{x}\right)=1\end{array}\right.;$$

$$b=\lim_{x\to\pm\infty}(y-kx)=\left[\begin{array}{l}1{,}5\lim\limits_{x\to-\infty}\left(-\sqrt[3]{(x-1)^2}-x+1+x\right)=1{,}5\lim\limits_{x\to-\infty}\left(-\sqrt[3]{(x-1)^2}+1\right)=-\infty\\ \lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{2}{x-2}+x-2-x\right)=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{2}{x-2}-2\right)=-2\end{array}\right..$$

$y=x-2$ – наклонная асимптота при $x\to+\infty$.

3) Пересечение с осями координат и промежутки знакопостоянства.

Пересечение с координатными осями:

а) с осью абсцисс: $y=0\Rightarrow\left[\begin{array}{l}-1{,}5\sqrt[3]{(x-1)^2}-1{,}5x+1{,}5,\ x\le 2\\ \dfrac{2}{x-2}+x-2,\ x>2\end{array}\right.\Rightarrow x=0,\ x=1;$

б) с осью ординат: $x=0\Rightarrow y=0$.

Промежуткии знакопостоянства функции.

x	$-\infty<x<0$	$0<x<1$	$1<x<2$	$2<x<+\infty$
y	+	–	–	+

4) Четность/нечетность, периодичность.

Функция непериодическая, не является четной/нечетной.

5) Монотонность и экстремумы.

Найдем производную функции:

$$y'=\begin{cases}1{,}5\left(-\sqrt[3]{(x-1)^2}-x+1\right)', & x\le 2\\ \left(\dfrac{2}{x-2}+x-2\right)', & x>2\end{cases}=\begin{cases}1{,}5\left(-\dfrac{2}{3\sqrt[3]{x-1}}-1\right), & x\le 2\\ -\dfrac{2}{(x-2)^2}+1, & x>2\end{cases}=\begin{cases}-\dfrac{1}{\sqrt[3]{x-1}}-1{,}5, & x\le 2\\ \dfrac{(x-2)^2-2}{(x-2)^2}, & x>2\end{cases}.$$

Найдем критические точки:

$$y'=0:\left[\begin{array}{l}-\dfrac{1}{\sqrt[3]{x-1}}-1{,}5, \ x\le 2\\ \dfrac{(x-2)^2-2}{(x-2)^2}, \ x>2\end{array}\right.\Rightarrow x=\frac{19}{27},\ x=2+\sqrt{2};$$

$y'=\infty:\ x=1;$

$y'\nexists:\ x=2.$

Промежутки монотонности.

x	$-\infty<x<\frac{19}{27}$	$\frac{19}{27}<x<1$	$1<x<2$	$2<x<2+\sqrt{2}$	$2+\sqrt{2}<x<+\infty$
y'	–	+	–	–	+
y	↓	↑	↓	↓	↑

$x=\frac{19}{27}$ – точка «гладкого» минимума, $y_{\min}=-\frac{2}{9}$;

$x=1$ – точка «острого» максимума, $y_{\max}=0$

$x=2$ – точка минимума, $y_{\min}=-3$;

$x=2+\sqrt{2}$ – точка «гладкого» минимума, $y_{\min}=2\sqrt{2}$.

6) Промежутки выпуклости/вогнутости функции и точки перегиба.

Найдем вторую производную функции:

$$y''=\begin{cases}\left(-\dfrac{1}{\sqrt[3]{x-1}}-1{,}5\right)', & x\le 2\\ \left(-\dfrac{2}{(x-2)^2}+1\right)', & x>2\end{cases}=\begin{cases}\dfrac{1}{3\sqrt[3]{(x-1)^4}}, & x\le 2\\ \dfrac{4}{(x-2)^3}, & x>2\end{cases}.$$

Найдем критические точки:

$y''=0: x\in\varnothing;$

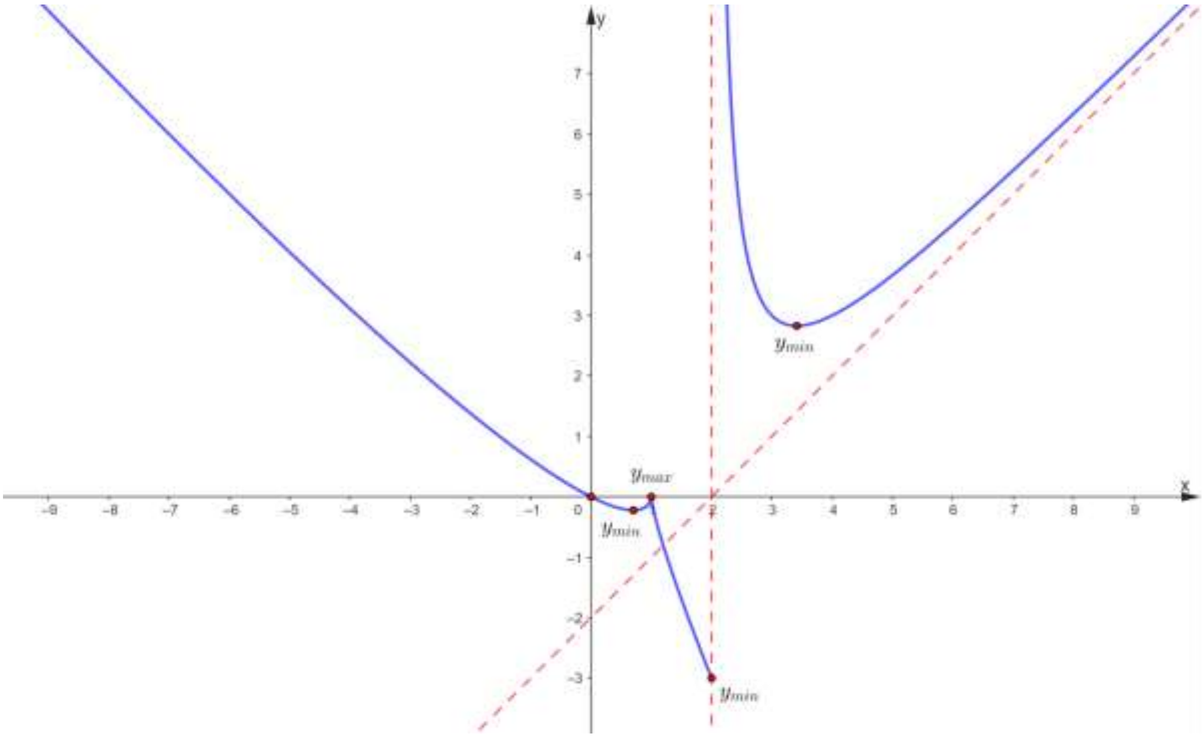
$y'' = \infty$: $x = 1$;

$y'' \nexists$: $x = 2$.

Отметим промежутки выпуклости/вогнутости функции.

x	$-\infty < x < 1$	$1 < x < 2$	$2 < x < +\infty$
y''	+	+	+
y	$\cup$	$\cup$	$\cup$

7) График функции.



Подробный гайд по исследованию функций:

- Алгоритм исследования,
- Примеры подробных решений,
- Инструкция по построению графика,
- Обзор онлайн-сервисов и калькуляторов,
- Ссылки на полезные сайты по исследованию функций

вы найдете здесь: https://www.matburo.ru/ex_ma.php?p1=maissl