Задача. Исследовать функцию и построить график

$$y=\sqrt[3]{x^2(x+4)}$$

Решение.

1) Область определения функции вся числовая прямая $D(y)=(-\infty;+\infty)$.

2) Точки пересечения с осями координат:
Ox: $y=\sqrt[3]{x^2(x+4)}=0$, $x_1=0, x_2=-4$, точки (0,0) и (-4,0).
Oy : $x=0$, $\Rightarrow y=0$, точка (0,0).

3) Функция общего вида, так как
$y(-x)=\sqrt[3]{(-x)^2(-x+4)}=-\sqrt[3]{x^2(x-4)}\neq \pm y(x)$

4) Экстремумы и монотонность. Вычисляем первую производную:
$$y'(x)=\left(\sqrt[3]{x^2(x+4)}\right)'=\left(\sqrt[3]{x^3+4x^2}\right)'=\frac{3x^2+8x}{3\left(x^3+4x^2\right)^{2/3}}=\frac{x(3x+8)}{\left(x^3+4x^2\right)^{2/3}}$$
Находим критические точки: $x_1=0,\ x_2=-8/3,\ x_3=-4$
Исследуем знак производной на интервалах, на которые критические точки делят области определения функции.

y'	+		+		–		+
y	↗	-4	↗	-8/3	↘	0	↗

Функция убывает на интервале $(-8/3;0)$, возрастает на интервалах $(-\infty;-4)$, $(-4;-8/3),(0;+\infty)$. Функция имеет минимум при $x=0$, $y(0)=0$, максимум при $x=-8/3$, $y(-8/3)\approx 2{,}12$.

5) Выпуклость и точки перегиба. Вычисляем вторую производную.

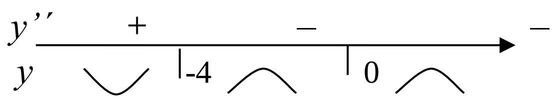
$$y''(x)=\left(\frac{3x^2+8x}{3\left(x^3+4x^2\right)^{2/3}}\right)'=\frac{1}{3}\frac{(6x+8)\left(x^3+4x^2\right)^{2/3}-(3x^2+8x)\frac{2}{3}\left(x^3+4x^2\right)^{-1/3}(3x^2+8x)}{\left(x^3+4x^2\right)^{4/3}}=$$

$$=\frac{2}{9}\frac{(9x+12)\left(x^3+4x^2\right)-(3x^2+8x)(3x^2+8x)}{\left(x^3+4x^2\right)^{5/3}}=\frac{2}{9}\frac{9x^4+36x^3+12x^3+48x^2-9x^4-48x^3-64x^2}{\left(x^3+4x^2\right)^{5/3}}=$$

$$=\frac{2}{9}\frac{-16x^2}{\left(x^3+4x^2\right)^{5/3}}.$$

Находим критические точки: $x_1=0,\ x_2=-4$.

Исследуем знак производной на интервалах, на которые критические точки делят области определения функции.



Функция выпукла вниз на интервале $(-\infty;-4)$, выпукла вверх на интервалах $(-4;0),\ (0;+\infty)$.

Точки перегиба: $x=0$, $y(0)=0$ и $x=-4$, $y(-4)=0$.

6) Наклонные асимптоты вида $y=kx+b$.

$$k=\lim_{x\to\infty}\frac{y}{x}=\lim_{x\to\infty}\frac{\sqrt[3]{x^2(x+4)}}{x}=\lim_{x\to\infty}\sqrt[3]{\frac{(x+4)}{x}}=\lim_{x\to\infty}\sqrt[3]{1+\frac{4}{x}}=1,$$

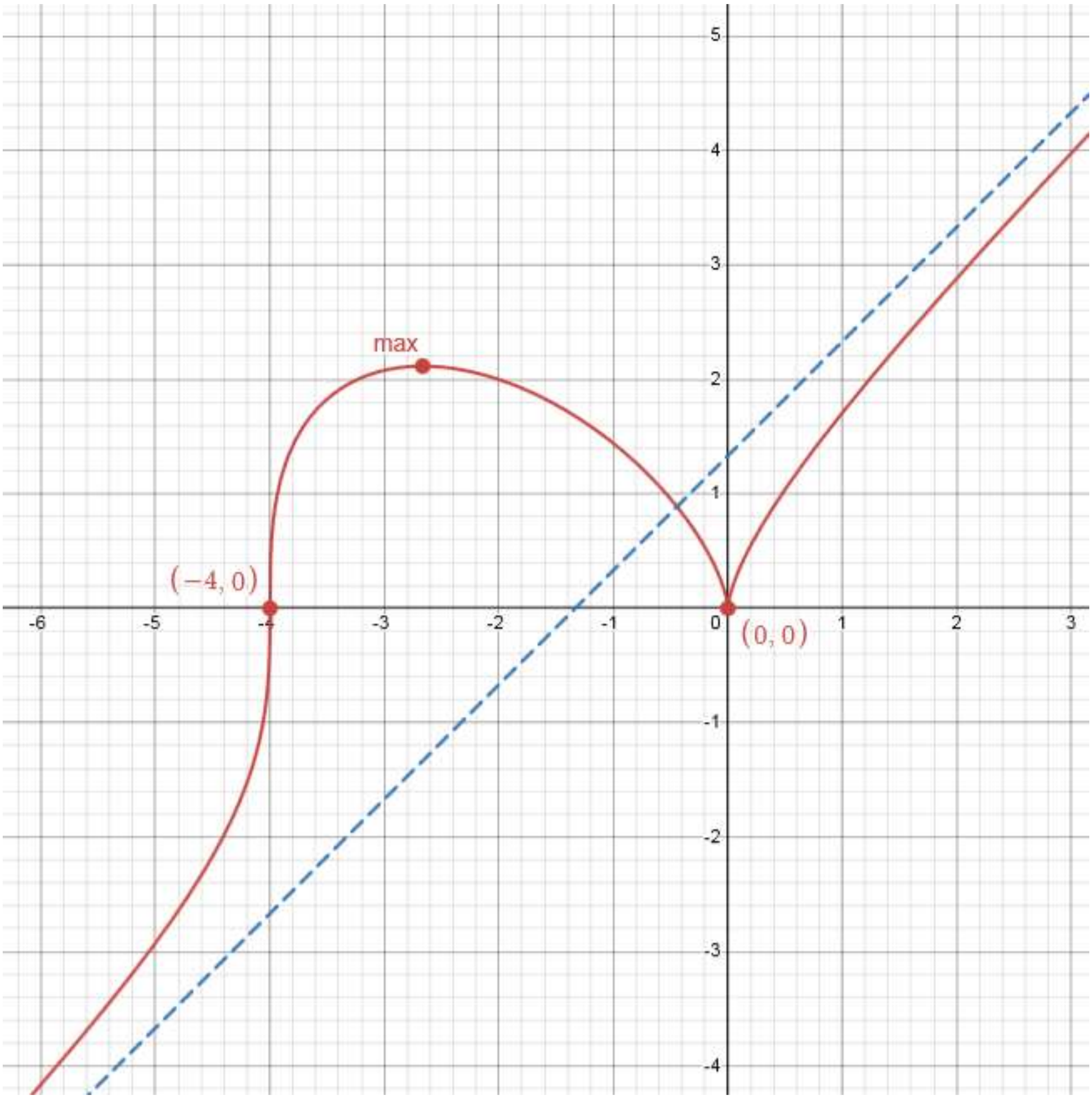
$$b=\lim_{x\to\infty}(y-kx)=\lim_{x\to\infty}\left(\sqrt[3]{x^2(x+4)}-x\right)=\lim_{x\to\infty}\frac{\left(\sqrt[3]{(x^3+4x^2)}-x\right)\left(\sqrt[3]{(x^3+4x^2)^2}+x\sqrt[3]{(x^3+4x^2)}+x^2\right)}{\left(\sqrt[3]{(x^3+4x^2)^2}+x\sqrt[3]{(x^3+4x^2)}+x^2\right)}=$$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{\left((x^3+4x^2)-x^3\right)}{\left(\sqrt[3]{(x^3+4x^2)^2}+x\sqrt[3]{(x^3+4x^2)}+x^2\right)}=\lim_{x\to\infty}\frac{\left(4x^2\right)}{\left(\sqrt[3]{(x^3+4x^2)^2}+x\sqrt[3]{(x^3+4x^2)}+x^2\right)}=$$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{4}{\left(\sqrt[3]{(1+4/x)^2}+\sqrt[3]{(1+4/x)}+1\right)}=\frac{4}{3}.$$

Наклонная асимптота $y=x+\dfrac{4}{3}$.

7) Строим график функции и асимптоту:



Подробный гайд по исследованию функций:

- Алгоритм исследования,
- Примеры подробных решений,
- Инструкция по построению графика,
- Обзор онлайн-сервисов и калькуляторов,
- Ссылки на полезные сайты по исследованию функций

вы найдете здесь: https://www.matburo.ru/ex_ma.php?p1=maissl