Задача. Исследовать функцию и построить график

$$y = x^3 - 3x + 2$$

Решение.

Область определения функции: $x \in (-\infty;\ +\infty)$.

Функция не является нечетной, так как $y(-x) = (-x)^3 - 3(-x) + 2 = -x^3 + 3x + 2 \neq -y(x)$.

Функция не является четной, так как $y(-x) = (-x)^3 - 3(-x) + 2 = -x^3 + 3x + 2 \neq y(x)$.

Функция не является периодической.

Функция непрерывна на всей области определения, вертикальных асимптот нет.

$$\lim_{x\to+\infty} y = \lim_{x\to+\infty}\left(x^3 - 3x + 2\right) = +\infty;\quad \lim_{x\to-\infty} y = \lim_{x\to-\infty}\left(x^3 - 3x + 2\right) = -\infty$$

Так как оба предела бесконечны, горизонтальных асимптот нет.

Попробуем найти наклонные асимптоты в виде $y = kx + b$

$$k = \lim_{x\to\infty}\frac{y}{x} = \lim_{x\to\infty}\frac{(x^3 - 3x + 2)}{x} = \lim_{x\to\infty}\left(x^2 - 3x + \frac{2}{x}\right) = +\infty$$

Так как предел бесконечный, наклонных асимптот нет.

Найдем точки пересечения с осями координат. Пересечения с осью Oy:

$$x = 0$$

$$y = 0^3 - 3\cdot 0 + 2 = 2$$

Точка пересечения с осью Oy: $(0; 2)$

Пересечения с осью Ox:

$$y = 0$$

$$x^3 - 3x + 2 = 0$$

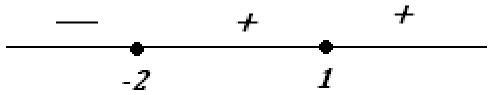
Подберем корень $x = 1$ и разделим многочлен $x^3 - 3x + 2$ на $x - 1$:

$$\begin{array}{r|l}
x^3 - 3x + 2 & x - 1 \\
\cline{2-2}
\underline{x^3 - x^2} & x^2 + x - 2 \\
x^2 - 3x & \\
\underline{x^2 - x} & \\
-2x + 2 & \\
\underline{-2x + 2} & \\
0 &
\end{array}$$

Получим: $x^3 - 3x + 2 = (x - 1)\left(x^2 + x - 2\right)$. Корни квадратного трехчлена $x^2 + x - 2$: $x = 1, x = -2$. Итак, точки пересечения с осью Ox: $(1; 0), (-2; 0)$

Определим промежутки знакопостоянства функции методом интервалов:

$$y = x^3 - 3x + 2 = (x-1)(x-1)(x+2)$$



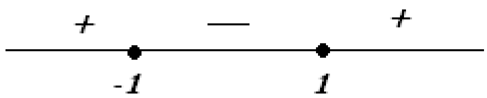
Итак, при $x \in (-\infty;\ -2)$ $y < 0$, при $x \in (-2; 1), (1; +\infty)$ $y > 0$.

Исследуем функцию на экстремумы.

$$y' = (x^3 - 3x + 2)' = 3x^2 - 3$$

$$y' = 0 \ \rightarrow \ \ 3x^2 - 3 = 0\,; \ \ x = \pm 1$$

Определим знаки $y' = 3x^2 - 3$ методом интервалов:



Итак, при $x \in (-\infty;\ -1), (1;\ +\infty)$ $\ y' > 0$, функция возрастает, при $x \in (-1;\ 1)$ $\ y' < 0$, функция убывает. Точка $x = -1$ - точка максимума, $x = 1$ - точка минимума.

$$y(-1) = (-1)^3 - 3 \cdot (-1) + 2 = -1 + 3 + 2 = 4$$

$$y(1) = (1)^3 - 3 \cdot 1 + 2 = 1 - 3 + 2 = 0$$

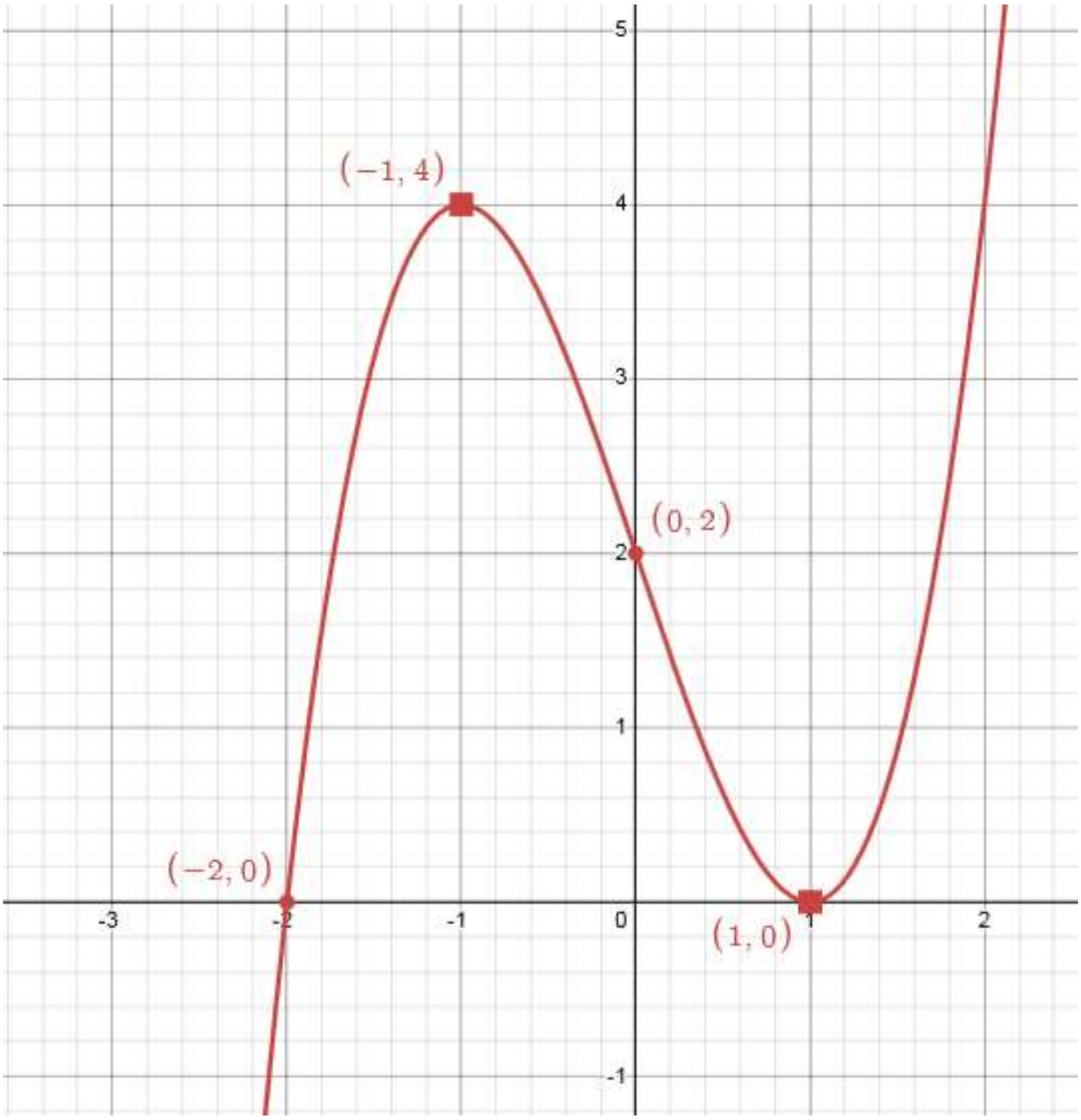
Исследуем функцию на перегибы.

$$y'' = (3x^2 - 3)' = 6x$$

$$y'' = 0 \rightarrow x = 0$$

Очевидно, при $x \in (-\infty;\ 0)$ $\ y'' < 0$, функция выпукла, при $x \in (0;\ +\infty)$ $\ y'' > 0$, функция вогнута, $x = 0$ - точка перегиба.

По полученным данным построим график функции:



Подробный гайд по исследованию функций:

- Алгоритм исследования,
- Примеры подробных решений,
- Инструкция по построению графика,
- Обзор онлайн-сервисов и калькуляторов,
- Ссылки на полезные сайты по исследованию функций

вы найдете здесь: https://www.matburo.ru/ex_ma.php?p1=maissl