

Численные методы: примеры решений в Excel

Задание

Найти стационарные точки, проверить их на экстремальность, а также найти все локальные и глобальные максимумы и минимумы.

$$f(x_1, x_2) = x_1^2 + x_2^2 + 2x_3^2 + x_1x_2 + 2x_1x_3 + 3x_2x_3 + 3x_2x_3 - x_1 \rightarrow \text{extr}$$

Решение

Находим дифференциалы функции.

$$\frac{df(x_1, x_2)}{dx_1} = 2x_1 + x_2 + 2x_3 - 1$$

$$\frac{df(x_1, x_2)}{dx_2} = 2x_2 + x_1 + 6x_3$$

Приравниваем их к 0.

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 + 2x_3 - 1 = 0 \\ 2x_2 + x_1 + 6x_3 = 0 \end{cases}$$

Единственным решением данной системы является:

$$\begin{cases} x_1 = \frac{2x_3 + 2}{3} \\ x_2 = -\frac{10x_3 + 1}{3} \end{cases}$$

Так при $x_3 = 2$:

$$\begin{cases} x_1 = 2 \\ x_2 = -7 \end{cases}$$

Далее находим вторые производные.

$$A = \frac{d^2 f(x_1, x_2)}{dx_1 dx_1} = 2$$

$$B = \frac{d^2 f(x_1, x_2)}{dx_1 dx_2} = 1$$

$$C = \frac{d^2 f(x_1, x_2)}{dx_2 dx_2} = 2$$

$$B = \frac{d^2 f(x_1, x_2)}{dx_2 dx_1} = 1$$

Поскольку $A > 0$ и $AC - B^2 = 3 > 0$, то в данной точке минимум.

Для нахождения локальных и глобальных максимумов используем Excel.

Переменную x_3 фиксируем = 2.

Глобальный минимум:

Данная работа выполнена на сайте www.matburo.ru
 Переходите на сайт, смотрите больше примеров или закажите свою работу
https://www.matburo.ru/ex_cm.php?p1=cmexcel
 ©МатБюро. Решение задач по математике, экономике, программированию

D2 fx =A2*A2+B2*B2+2*C2*C2+A2*B2+2*A2*C2+3*B2*C2+3*B2*C2-A2

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J
1	x1	x2	x3	F(x1,x2)						
2			2	8						

Параметры поиска решения

Оптимизировать целевую функцию:

До: Максимум Минимум Значения:

Изменяя ячейки переменных:

Получаем.

x1	x2	x3	F(x1,x2)
2,00	-7,00	2	-31

Решение совпадает с найденным аналитически.

Пробуем вводить ограничения.

D2 fx =A2*A2+B2*B2+2*C2*C2+A2*B2+2*A2*C2+3*B2*C2+3*B2*C2-A2

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J
1	x1	x2	x3	F(x1,x2)						
2	2,00	-7,00	2	-31						

Параметры поиска решения

Оптимизировать целевую функцию:

До: Максимум Минимум Значения:

Изменяя ячейки переменных:

В соответствии с ограничениями:

x1	x2	x3	F(x1,x2)
1,00	-6,50	2	-30,25

Данная работа выполнена на сайте www.matburo.ru
 Переходите на сайт, смотрите больше примеров или закажите свою работу
https://www.matburo.ru/ex_cm.php?p1=cmexcel
 ©МатБюро. Решение задач по математике, экономике, программированию

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J
1	x1	x2	x3	F(x1,x2)						
2	1,00	-8,00	2	-28						

Параметры поиска решения

Оптимизировать целевую функцию:

До: Максимум Минимум Значения:

Изменяя ячейки переменных:

В соответствии с ограничениями:

x1	x2	x3	F(x1,x2)
1,00	-8,00	2	-28

Как видим, при смещении интервала минимизирования относительно точки (2;-7) влево минимум функции находится на правой границе интервала, то же самое будет происходить если сместить левую границу интервала минимизирования вправо - минимум функции будет находится на левой границе интервала.

Таким образом, точка (2;-7) – глобальный минимум, все локальные минимумы стремятся к нему.

В общем виде глобальный минимум:

$$\begin{cases} x_1 = \frac{2x_3 + 2}{3} \\ x_2 = -\frac{10x_3 + 1}{3} \end{cases}$$