

## Тема: Системы линейных уравнений

ЗАДАНИЕ. Исследовать на совместность и решить систему уравнений:

$$\begin{cases} 3x_1 + 0x_2 + x_3 - 2x_4 + 0x_5 = 0, \\ -x_1 + 2x_2 - x_3 + x_4 - x_5 = -3, \\ 2x_1 + 2x_2 + 0x_3 - x_4 - x_5 = -3, \\ x_1 - x_2 - x_3 + 0x_4 - 2x_5 = 1. \end{cases}$$

РЕШЕНИЕ:

Будем работать с расширенной матрицей системы:

$$\tilde{A} = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 1 & -2 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 1 & -1 & -3 \\ 2 & 2 & 0 & -1 & -1 & -3 \\ 1 & -1 & -1 & 0 & -2 & 1 \end{pmatrix} \sim$$

Будем одновременно исследовать на совместность и решать систему уравнений, приводя матрицу к более простому виду с помощью элементарных преобразований (методом Жордана-Гаусса).

Вычитаем из первой строки четвертую, умноженную на 3. Прибавим ко второй строке четвертую. Вычтем из третьей строки четвертую, умноженную на 2.

$$\sim \begin{pmatrix} 0 & 3 & 4 & -2 & 6 & -3 \\ 0 & 1 & -2 & 1 & -3 & -2 \\ 0 & 4 & 2 & -1 & 3 & -5 \\ 1 & -1 & -1 & 0 & -2 & 1 \end{pmatrix} \sim$$

Вычитаем из строки 1 строку 2, умноженную на 3. Вычитаем из строки 3 строку 2, умноженную на 4. Прибавляем к четвертой строке вторую. Получаем:

$$\sim \begin{pmatrix} 0 & 0 & 10 & -5 & 15 & 3 \\ 0 & 1 & -2 & 1 & -3 & -2 \\ 0 & 0 & 10 & -5 & 15 & 3 \\ 1 & 0 & -3 & 1 & -5 & -1 \end{pmatrix} \sim$$

Вычитаем из третьей строки первую. Убираем нулевую строку из матрицы (она не влияет на ранг системы и на решение).

$$\sim \begin{pmatrix} 0 & 0 & 10 & -5 & 15 & 3 \\ 0 & 1 & -2 & 1 & -3 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -3 & 1 & -5 & -1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 0 & 0 & 10 & -5 & 15 & 3 \\ 0 & 1 & -2 & 1 & -3 & -2 \\ 1 & 0 & -3 & 1 & -5 & -1 \end{pmatrix}$$

Поделим первую строку на 10.

$$\sim \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & -0,5 & 1,5 & 0,3 \\ 0 & 1 & -2 & 1 & -3 & -2 \\ 1 & 0 & -3 & 1 & -5 & -1 \end{pmatrix}$$

Прибавим ко второй строке первую, умноженную на 2. Прибавим к третьей строке первую, умноженную на 3. Получим:

$$\sim \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & -0,5 & 1,5 & 0,3 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & -1,4 \\ 1 & 0 & 0 & -0,5 & -0,5 & -0,1 \end{pmatrix}$$

Получили, что ранг матрицы системы и ранг расширенной матрицы одинаковы и равны 3, система совместна. Так как число переменных равно 5, а ранг системы 3, то размерность пространства решений равна 2. Выбираем в качестве базисных переменных  $x_1, x_2, x_3$ , а в качестве двух свободных переменных  $x_4, x_5$ . Тогда решение можно записать в следующем виде:

$$\begin{cases} x_1 = -0,1 + 0,5x_4 + 0,5x_5, \\ x_2 = -1,4, \\ x_3 = 0,3 + 0,5x_4 - 1,5x_5, \\ x_4 = x_4, \\ x_5 = x_5. \end{cases}$$

Или

$$\begin{cases} x_1 = -0,1 + 0,5C_1 + 0,5C_2, \\ x_2 = -1,4, \\ x_3 = 0,3 + 0,5C_1 - 1,5C_2, \\ x_4 = C_1, \\ x_5 = C_2. \end{cases}$$

Здесь  $C_1, C_2$  - произвольные константы.