

Решение задач выполнено на сайте МатБюро <https://www.matburo.ru/>

Сделаем на заказ подробно, недорого, ответственно ваши задания:

[https://www.matburo.ru/ex\\_dm.php?p1=dmkom](https://www.matburo.ru/ex_dm.php?p1=dmkom)

©МатБюро - Решение задач по математике, экономике, статистике, программированию

## Пример решения задачи коммивояжера (алгоритм Литлла)

Решить задачу коммивояжера методом ветвей и границ:

$$\begin{pmatrix} \infty & 4 & 5 & 7 & 5 \\ 8 & \infty & 5 & 6 & 6 \\ 3 & 5 & \infty & 9 & 6 \\ 3 & 5 & 6 & \infty & 2 \\ 6 & 2 & 3 & 8 & \infty \end{pmatrix}$$

### Решение.

Возьмем в качестве произвольного маршрута:

$$X_0 = (1,2);(2,3);(3,4);(4,5);(5,1)$$

$$\text{Тогда } F(X_0) = 4 + 5 + 9 + 2 + 6 = 26$$

Для определения нижней границы множества воспользуемся операцией редукции или приведения матрицы по строкам, для чего необходимо в каждой строке матрицы  $D$  найти минимальный элемент,  $d_i = \min(j) d_{ij}$ .

$i \setminus j$	1	2	3	4	5	$d_i$
1	$\infty$	4	5	7	5	4
2	8	$\infty$	5	6	6	5
3	3	5	$\infty$	9	6	3
4	3	5	6	$\infty$	2	2
5	6	2	3	8	$\infty$	2

Затем вычитаем  $d_i$  из элементов рассматриваемой строки.

Решение задач выполнено на сайте МатБюро <https://www.matburo.ru/>

Сделаем на заказ подробно, недорого, ответственно ваши задания:

[https://www.matburo.ru/ex\\_dm.php?p1=dmkom](https://www.matburo.ru/ex_dm.php?p1=dmkom)

©МатБюро - Решение задач по математике, экономике, статистике, программированию

$i \setminus j$	1	2	3	4	5
1	$\infty$	0	1	3	1
2	3	$\infty$	0	1	1
3	0	2	$\infty$	6	3
4	1	3	4	$\infty$	0
5	4	0	1	6	$\infty$

Такую же операцию редукции проводим по столбцам:

$i \setminus j$	1	2	3	4	5
1	$\infty$	0	1	3	1
2	3	$\infty$	0	1	1
3	0	2	$\infty$	6	3
4	1	3	4	$\infty$	0
5	4	0	1	6	$\infty$
$d_j$	0	0	0	1	0

После вычитания минимальных элементов получаем полностью редуцированную матрицу, где величины  $d_i$  и  $d_j$  называются константами приведения.

$i \setminus j$	1	2	3	4	5
1	$\infty$	0	1	2	1
2	3	$\infty$	0	0	1
3	0	2	$\infty$	5	3
4	1	3	4	$\infty$	0
5	4	0	1	5	$\infty$

Сумма констант приведения определяет нижнюю границу  $H$ :

$$H = \sum d_i + \sum d_j$$

Решение задач выполнено на сайте МатБюро <https://www.matburo.ru/>

Сделаем на заказ подробно, недорого, ответственно ваши задания:

[https://www.matburo.ru/ex\\_dm.php?p1=dmkom](https://www.matburo.ru/ex_dm.php?p1=dmkom)

©МатБюро - Решение задач по математике, экономике, статистике, программированию

$$N = 4+5+3+2+2+0+0+0+1+0 = 17$$

Элементы матрицы  $d_{ij}$  соответствуют расстоянию от пункта  $i$  до пункта  $j$ .

Длина маршрута определяется выражением:

$$F(M_k) = \sum d_{ij}$$

Причем каждая строка и столбец входят в маршрут только один раз с элементом  $d_{ij}$ .

Определяем ребро ветвления и разобьем все множество маршрутов относительно этого ребра на два подмножества  $(i,j)$  и  $(i^*,j^*)$ .

С этой целью для всех клеток матрицы с нулевыми элементами заменяем поочередно нули на  $\infty$  и определяем для них сумму образовавшихся констант приведения, они приведены в скобках.

$i \setminus j$	1	2	3	4	5	$d_i$
1	$\infty$	0(1)	1	2	1	1
2	3	$\infty$	0(1)	0(2)	1	0
3	0(3)	2	$\infty$	5	3	2
4	1	3	4	$\infty$	0(2)	1
5	4	0(1)	1	5	$\infty$	1
$d_j$	1	0	1	2	1	0

$$d(1,2) = 1 + 0 = 1; d(2,3) = 0 + 1 = 1;$$

$$d(2,4) = 0 + 2 = 2; d(3,1) = 2 + 1 = 3;$$

$$d(4,5) = 1 + 1 = 2; d(5,2) = 1 + 0 = 1;$$

Наибольшая сумма констант приведения равна  $(2 + 1) = 3$  для ребра  $(3,1)$ , следовательно, множество разбивается на два подмножества  $(3,1)$  и  $(3^*,1^*)$ .

Решение задач выполнено на сайте МатБюро <https://www.matburo.ru/>

Сделаем на заказ подробно, недорого, ответственно ваши задания:

[https://www.matburo.ru/ex\\_dm.php?p1=dmkom](https://www.matburo.ru/ex_dm.php?p1=dmkom)

©МатБюро - Решение задач по математике, экономике, статистике, программированию

Исключение ребра (3,1) проводим путем замены элемента  $d_{31} = 0$  на  $\infty$ , после чего осуществляем очередное приведение матрицы расстояний для образовавшегося подмножества (3\*,1\*), в результате получим редуцированную матрицу.

$i \setminus j$	1	2	3	4	5	$d_i$
1	$\infty$	0	1	2	1	0
2	3	$\infty$	0	0	1	0
3	$\infty$	2	$\infty$	5	3	2
4	1	3	4	$\infty$	0	0
5	4	0	1	5	$\infty$	0
$d_j$	1	0	0	0	0	3

Нижняя граница гамильтоновых циклов этого подмножества:

$$H(3^*, 1^*) = 17 + 3 = 20$$

Включение ребра (3,1) проводится путем исключения всех элементов 3-ой строки и 1-го столбца, в которой элемент  $d_{13}$  заменяем на  $\infty$ , для исключения образования негамильтонова цикла.

В результате получим другую сокращенную матрицу (4 x 4), которая подлежит операции приведения.

После операции приведения сокращенная матрица будет иметь вид:

$i \setminus j$	2	3	4	5	$d_i$
1	0	$\infty$	2	1	0
2	$\infty$	0	0	1	0
4	3	4	$\infty$	0	0
5	0	1	5	$\infty$	0
$d_j$	0	0	0	0	0

Решение задач выполнено на сайте МатБюро <https://www.matburo.ru/>

Сделаем на заказ подробно, недорого, ответственно ваши задания:

[https://www.matburo.ru/ex\\_dm.php?p1=dmkom](https://www.matburo.ru/ex_dm.php?p1=dmkom)

©МатБюро - Решение задач по математике, экономике, статистике, программированию

Сумма констант приведения сокращенной матрицы:

$$\sum d_i + \sum d_j = 0$$

Нижняя граница подмножества (3,1) равна:

$$H(3,1) = 17 + 0 = 17 \leq 20$$

Поскольку нижняя граница этого подмножества (3,1) меньше, чем подмножества (3\*,1\*), то ребро (3,1) включаем в маршрут с новой границей  $H = 17$

Определяем ребро ветвления и разобьем все множество маршрутов относительно этого ребра на два подмножества (i,j) и (i\*,j\*).

С этой целью для всех клеток матрицы с нулевыми элементами заменяем поочередно нули на  $\infty$  и определяем для них сумму образовавшихся констант приведения, они приведены в скобках.

i \ j	2	3	4	5	$d_i$
1	0(1)	$\infty$	2	1	1
2	$\infty$	0(1)	0(2)	1	0
4	3	4	$\infty$	0(4)	3
5	0(1)	1	5	$\infty$	1
$d_j$	0	1	2	1	0

$$d(1,2) = 1 + 0 = 1; d(2,3) = 0 + 1 = 1;$$

$$d(2,4) = 0 + 2 = 2; d(4,5) = 3 + 1 = 4;$$

$$d(5,2) = 1 + 0 = 1;$$

Наибольшая сумма констант приведения равна  $(3 + 1) = 4$  для ребра (4,5), следовательно,

Решение задач выполнено на сайте МатБюро <https://www.matburo.ru/>

Сделаем на заказ подробно, недорого, ответственно ваши задания:

[https://www.matburo.ru/ex\\_dm.php?p1=dmkom](https://www.matburo.ru/ex_dm.php?p1=dmkom)

©МатБюро - Решение задач по математике, экономике, статистике, программированию

множество разбивается на два подмножества (4,5) и (4\*,5\*).

Исключение ребра (4,5) проводим путем замены элемента  $d_{45} = 0$  на  $\infty$ , после чего осуществляем очередное приведение матрицы расстояний для образовавшегося подмножества (4\*,5\*), в результате получим редуцированную матрицу.

$i \setminus j$	2	3	4	5	$d_i$
1	0	$\infty$	2	1	0
2	$\infty$	0	0	1	0
4	3	4	$\infty$	$\infty$	3
5	0	1	5	$\infty$	0
$d_j$	0	0	0	1	4

Нижняя граница гамильтоновых циклов этого подмножества:

$$H(4^*,5^*) = 17 + 4 = 21$$

Включение ребра (4,5) проводится путем исключения всех элементов 4-ой строки и 5-го столбца, в которой элемент  $d_{54}$  заменяем на  $\infty$ , для исключения образования негамильтонова цикла.

В результате получим другую сокращенную матрицу (3 x 3), которая подлежит операции приведения.

После операции приведения сокращенная матрица будет иметь вид:

$i \setminus j$	2	3	4	$d_i$
1	0	$\infty$	2	0

Решение задач выполнено на сайте МатБюро <https://www.matburo.ru/>

Сделаем на заказ подробно, недорого, ответственно ваши задания:

[https://www.matburo.ru/ex\\_dm.php?p1=dmkom](https://www.matburo.ru/ex_dm.php?p1=dmkom)

©МатБюро - Решение задач по математике, экономике, статистике, программированию

2	$\infty$	0	0	0
5	0	1	$\infty$	0
$d_j$	0	0	0	0

Сумма констант приведения сокращенной матрицы:

$$\sum d_i + \sum d_j = 0$$

Нижняя граница подмножества (4,5) равна:

$$H(4,5) = 17 + 0 = 17 \leq 21$$

Поскольку нижняя граница этого подмножества (4,5) меньше, чем подмножества (4\*,5\*), то ребро (4,5) включаем в маршрут с новой границей  $H = 17$

Определяем ребро ветвления и разобьем все множество маршрутов относительно этого ребра на два подмножества (i,j) и (i\*,j\*).

С этой целью для всех клеток матрицы с нулевыми элементами заменяем поочередно нули на  $\infty$  и определяем для них сумму образовавшихся констант приведения, они приведены в скобках.

i \ j	2	3	4	$d_i$
1	0(2)	$\infty$	2	2
2	$\infty$	0(1)	0(2)	0
5	0(1)	1	$\infty$	1
$d_j$	0	1	2	0

$$d(1,2) = 2 + 0 = 2; d(2,3) = 0 + 1 = 1;$$

$$d(2,4) = 0 + 2 = 2; d(5,2) = 1 + 0 = 1;$$

Решение задач выполнено на сайте МатБюро <https://www.matburo.ru/>

Сделаем на заказ подробно, недорого, ответственно ваши задания:

[https://www.matburo.ru/ex\\_dm.php?p1=dmkom](https://www.matburo.ru/ex_dm.php?p1=dmkom)

©МатБюро - Решение задач по математике, экономике, статистике, программированию

Наибольшая сумма констант приведения равна  $(0 + 2) = 2$  для ребра  $(2,4)$ , следовательно, множество разбивается на два подмножества  $(2,4)$  и  $(2^*,4^*)$ .

Исключение ребра  $(2,4)$  проводим путем замены элемента  $d_{24} = 0$  на  $\infty$ , после чего осуществляем очередное приведение матрицы расстояний для образовавшегося подмножества  $(2^*,4^*)$ , в результате получим редуцированную матрицу.

$i \setminus j$	2	3	4	$d_i$
1	0	$\infty$	2	0
2	$\infty$	0	$\infty$	0
5	0	1	$\infty$	0
$d_j$	0	0	2	2

Нижняя граница гамильтоновых циклов этого подмножества:

$$H(2^*,4^*) = 17 + 2 = 19$$

Включение ребра  $(2,4)$  проводится путем исключения всех элементов 2-ой строки и 4-го столбца, в которой элемент  $d_{42}$  заменяем на  $\infty$ , для исключения образования негамильтонова цикла.

В результате получим другую сокращенную матрицу  $(2 \times 2)$ , которая подлежит операции приведения.

После операции приведения сокращенная матрица будет иметь вид:

$i \setminus j$	2	3	$d_i$
1	0	$\infty$	0
5	0	1	0



Решение задач выполнено на сайте МатБюро <https://www.matburo.ru/>

Сделаем на заказ подробно, недорого, ответственно ваши задания:

[https://www.matburo.ru/ex\\_dm.php?p1=dmkom](https://www.matburo.ru/ex_dm.php?p1=dmkom)

©МатБюро - Решение задач по математике, экономике, статистике, программированию

$d_j$	0	1	1
-------	---	---	---

Сумма констант приведения сокращенной матрицы:

$$\sum d_i + \sum d_j = 1$$

Нижняя граница подмножества (2,4) равна:

$$H(2,4) = 17 + 1 = 18 \leq 19$$

Поскольку нижняя граница этого подмножества (2,4) меньше, чем подмножества (2\*,4\*), то ребро (2,4) включаем в маршрут с новой границей  $H = 18$

В соответствии с этой матрицей включаем в гамильтонов маршрут ребра (1,2) и (5,3).

В результате по дереву ветвлений гамильтонов цикл образуют ребра:

(3,1), (1,2), (2,4), (4,5), (5,3),

Минимальная длина маршрута = 18