

Решение задач выполнено на сайте МатБюро <https://www.matburo.ru/>

Сделаем на заказ подробно, недорого, ответственно ваши задания:

https://www.matburo.ru/ex_dm.php?p1=dmkom

©МатБюро - Решение задач по математике, экономике, статистике, программированию

Решение задачи коммивояжера методом ветвей и границ

Решите методом ветвей и границ следующую задачу коммивояжера:

$$12. \begin{pmatrix} \infty & 10 & 15 & 11 & 2 & 55 \\ 17 & \infty & 16 & 18 & 21 & 13 \\ 10 & 50 & \infty & 39 & 22 & 3 \\ 28 & 29 & 24 & \infty & 28 & 25 \\ 27 & 9 & 32 & 9 & \infty & 2 \\ 43 & 48 & 40 & 43 & 21 & \infty \end{pmatrix}$$

Решение

Возьмем в качестве произвольного допустимого маршрута:

$$x_0 = \{(1,2), (2,3), (3,4), (4,5), (5,6), (6, 1)\}.$$

Тогда $F(x_0) = 10+16+39+28+2+43 = 138$ – текущее значение Z_0 – (верхняя граница длин всех маршрутов).

Получим редуцированную матрицу \bar{C} .

$$C = \begin{pmatrix} \infty & 10 & 15 & 11 & 2 & 55 \\ 17 & \infty & 16 & 18 & 21 & 13 \\ 10 & 50 & \infty & 39 & 22 & 3 \\ 28 & 29 & 24 & \infty & 28 & 25 \\ 27 & 9 & 32 & 9 & \infty & 2 \\ 43 & 48 & 40 & 43 & 21 & \infty \end{pmatrix} \begin{matrix} 2 \\ 13 \\ 3 \\ 24 \\ 2 \\ 21 \end{matrix} \sim \begin{pmatrix} \infty & 8 & 13 & 9 & 0 & 53 \\ 4 & \infty & 3 & 5 & 8 & 0 \\ 7 & 47 & \infty & 36 & 19 & 0 \\ 4 & 5 & 0 & \infty & 4 & 1 \\ 25 & 7 & 30 & 7 & \infty & 0 \\ 22 & 27 & 19 & 22 & 0 & \infty \end{pmatrix} \begin{matrix} 4 \\ 5 \\ 0 \\ 5 \\ 0 \\ 0 \end{matrix} \sim \begin{pmatrix} \infty & 3 & 13 & 4 & 0 & 53 \\ 0 & \infty & 3 & 0 & 8 & 0 \\ 3 & 42 & \infty & 31 & 19 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \infty & 4 & 1 \\ 21 & 2 & 30 & 2 & \infty & 0 \\ 18 & 22 & 19 & 17 & 0 & \infty \end{pmatrix} = \bar{C}$$

Нижняя граница $d(x) = 2+13+3+24+2+21+4+5+5 = 79$. Данное значение является нижней границей длин всех маршрутов. Заметим, что в идеальном случае поиск решения заключался бы в выборе ровно одного нулевого элемента в каждой строке и каждом столбце. Другими словами, если бы такой маршрут нулевой длины бы быть найден, то длина оптимального маршрута равнялась бы 79. Исходя из верхней и нижней границ, можно заключить, что $79 \leq F(x^*) \leq 138$.

Выбор конкретной связи между пунктами производится с помощью характеристик, рассчитываемых для всех нулей приведенной матрицы. Характеристика считается как сумма наименьших элементов строки и столбца приведенной матрицы, в которых

находится ноль. Сам ноль, для которого в данный момент считается характеристика, во внимание не берется.

Ноль с наибольшим значением характеристики указывает на связь между пунктами, которую следует оценить - включать ее в маршрут или от нее следует отказаться

Выберем дугу (r,s) с помощью вычисления значений функции $\Theta(\mu, \nu)$.

$$\Theta(1,5) = 3, \Theta(2,1) = 0, \Theta(2,4) = 2, \Theta(2,6) = 0, \Theta(3,6) = 3, \Theta(4,1) = 0, \Theta(4,2) = 2, \Theta(4,3) = 3, \\ \Theta(5,6) = 2, \Theta(6,5) = 17.$$

Следовательно, $\Theta(r,s) = (6,5)$. Осуществим разбиение (ветвление). Правое подмножество X_2 будет содержать все маршруты, которые исключают дугу (6,5). Поэтому $C_2(6,5) = +\infty$.

$$C_2 = \begin{pmatrix} \infty & 3 & 13 & 4 & 0 & 53 \\ 0 & \infty & 3 & 0 & 8 & 0 \\ 3 & 42 & \infty & 31 & 19 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \infty & 4 & 1 \\ 21 & 2 & 30 & 2 & \infty & 0 \\ 18 & 22 & 19 & 17 & \infty & \infty \end{pmatrix} \begin{matrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 17 \end{matrix} \sim \begin{pmatrix} \infty & 3 & 13 & 4 & 0 & 53 \\ 0 & \infty & 3 & 0 & 8 & 0 \\ 3 & 42 & \infty & 31 & 19 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \infty & 4 & 1 \\ 21 & 2 & 30 & 2 & \infty & 0 \\ 1 & 5 & 2 & 0 & \infty & \infty \end{pmatrix} \begin{matrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{matrix} = \bar{C}_2.$$

Оценка снизу для правого подмножества X_2 определяется следующим образом:

$$d(X_2) = d(X) + \Theta(6,5) = 79 + 17 = 96 < Z_0.$$

Левое подмножество X_1 будет содержать маршруты, которые всегда включают дугу (6,5), и поэтому шестая строка и пятый столбец в матрицу C_1 не включаются. В результате будем иметь матрицу на единицу меньшего размера. Далее необходимо положить $C_1(5,6) = +\infty$, чтобы запретить подцикл $\{(6,5), (5,6)\}$. В результате получим матрицу

$$C_1 = \begin{matrix} & \begin{matrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 6 \end{matrix} \\ \begin{matrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \end{matrix} & \begin{pmatrix} \infty & 3 & 13 & 4 & 53 \\ 0 & \infty & 3 & 0 & 0 \\ 3 & 42 & \infty & 31 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \infty & 1 \\ 21 & 2 & 30 & 2 & \infty \end{pmatrix} \end{matrix} \begin{matrix} 3 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 2 \end{matrix} \sim \begin{matrix} & \begin{matrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 6 \end{matrix} \\ \begin{matrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \end{matrix} & \begin{pmatrix} \infty & 0 & 10 & 1 & 50 \\ 0 & \infty & 3 & 0 & 0 \\ 3 & 42 & \infty & 31 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \infty & 1 \\ 19 & 0 & 28 & 0 & \infty \end{pmatrix} \end{matrix} \begin{matrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{matrix} = \bar{C}_1.$$

Оценка снизу для левого подмножества:

$$d(X_1) = d(X) + \tau = 79 + 3 + 2 = 84 < Z_0,$$

где τ – константа приведения матрицы C_1

В списке кандидатов на ветвление множества X_1 и X_2 . Так как $d(X_1) < d(X_2)$, будем производить ветвление множества X_1 . Выберем дугу (r,s) с помощью значений функции $\Theta(\mu,\nu)$ для матрицы.

$$\Theta(1,2) = 1, \Theta(2,1) = 0, \Theta(2,4) = 0, \Theta(2,6) = 0, \Theta(3,6) = 3, \Theta(4,1) = 0, \Theta(4,2) = 0, \Theta(4,3) = 3, \\ \Theta(5,2) = 0, \Theta(5,4) = 0.$$

Следовательно, $\Theta(r,s) = 3, (r,s) = (3,6)$.

Правая подматрица:

$$C_4 = \begin{array}{c} \begin{array}{ccccc} 1 & 2 & 3 & 4 & 6 \\ \hline 1 & \left(\begin{array}{ccccc} \infty & 0 & 10 & 1 & 50 \end{array} \right) & 0 & 1 & \left(\begin{array}{ccccc} \infty & 0 & 10 & 1 & 50 \end{array} \right) \\ 2 & \left(\begin{array}{ccccc} 0 & \infty & 3 & 0 & 0 \end{array} \right) & 0 & 2 & \left(\begin{array}{ccccc} 0 & \infty & 3 & 0 & 0 \end{array} \right) \\ 3 & \left(\begin{array}{ccccc} 3 & 42 & \infty & 31 & \infty \end{array} \right) & 3 \sim 3 & 3 & \left(\begin{array}{ccccc} 0 & 39 & \infty & 28 & \infty \end{array} \right) \\ 4 & \left(\begin{array}{ccccc} 0 & 0 & 0 & \infty & 1 \end{array} \right) & 0 & 4 & \left(\begin{array}{ccccc} 0 & 0 & 0 & \infty & 1 \end{array} \right) \\ 5 & \left(\begin{array}{ccccc} 19 & 0 & 28 & 0 & \infty \end{array} \right) & 0 & 5 & \left(\begin{array}{ccccc} 19 & 0 & 28 & 0 & \infty \end{array} \right) \\ \hline & & & & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \end{array} = \bar{N}_4.$$

Оценка снизу для правого подмножества:

$$d(X_4) = d(X_1) + \Theta(3,6) = 84 + 3 = 87 < Z_0.$$

Левая подматрица. Левое подмножество X_3 будет содержать маршруты, которые всегда включают дугу $(3,6)$, и поэтому третья строка и шестой столбец в матрицу C_3 не включаются. В результате будем иметь матрицу на единицу меньшего размера. Далее необходимо положить $C_3(5,3) = +\infty$, чтобы запретить подцикл $\{(3,6),(6,5),(5,3)\}$. В результате получим матрицу

$$C_3 = \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} 1 & 2 & 3 & 4 \\ \hline 1 & \left(\begin{array}{cccc} \infty & 0 & 10 & 1 \end{array} \right) & 0 & 1 & \left(\begin{array}{cccc} \infty & 0 & 10 & 1 \end{array} \right) \\ 2 & \left(\begin{array}{cccc} 0 & \infty & 3 & 0 \end{array} \right) & 0 \sim 2 & 2 & \left(\begin{array}{cccc} 0 & \infty & 3 & 0 \end{array} \right) \\ 4 & \left(\begin{array}{cccc} 0 & 0 & 0 & \infty \end{array} \right) & 0 & 4 & \left(\begin{array}{cccc} 0 & 0 & 0 & \infty \end{array} \right) \\ 5 & \left(\begin{array}{cccc} 19 & 0 & \infty & 0 \end{array} \right) & 0 & 5 & \left(\begin{array}{cccc} 19 & 0 & \infty & 0 \end{array} \right) \\ \hline & & & & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \end{array} = \bar{C}_3.$$

$$d(X_3) = d(X_1) + \tau = 84 + 0 = 84 < Z_0.$$

В списке кандидатов на ветвление множества X_3, X_4, X_2 .

Минимальная нижняя оценка оказалась у множества X_3 , следовательно, для дальнейшего разбиения выбираем множество X_3 .

Определим дугу (r,s) с помощью значений функции $\Theta(\mu,\nu)$ для матрицы \bar{C}_3 .

$$\Theta(1,2) = 1, \Theta(2,1) = 0, \Theta(2,4) = 0, \Theta(4,1) = 0, \Theta(4,2) = 0, \Theta(4,3) = 3, \Theta(5,2) = 0, \Theta(5,4) = 0.$$

Следовательно, $\Theta(r,s) = 3$, $(r,s) = (4,3)$.

$$C_6 = \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} 1 & 2 & 3 & 4 \end{array} \\ \begin{array}{l} 1 \left(\begin{array}{cccc} \infty & 0 & 10 & 1 \end{array} \right) 0 \\ 2 \left(\begin{array}{cccc} 0 & \infty & 3 & 0 \end{array} \right) 0 \\ 4 \left(\begin{array}{cccc} 0 & 0 & \infty & \infty \end{array} \right) 0 \\ 5 \left(\begin{array}{cccc} 19 & 0 & \infty & 0 \end{array} \right) 0 \end{array} \end{array} \sim \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} 1 & 2 & 3 & 4 \end{array} \\ \begin{array}{l} 1 \left(\begin{array}{cccc} \infty & 0 & 10 & 1 \end{array} \right) \\ 2 \left(\begin{array}{cccc} 0 & \infty & 3 & 0 \end{array} \right) \\ 4 \left(\begin{array}{cccc} 0 & 0 & \infty & \infty \end{array} \right) \\ 5 \left(\begin{array}{cccc} 19 & 0 & \infty & 0 \end{array} \right) \end{array} \end{array} \sim \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} 1 & 2 & 3 & 4 \end{array} \\ \begin{array}{l} 1 \left(\begin{array}{cccc} \infty & 0 & 7 & 1 \end{array} \right) \\ 2 \left(\begin{array}{cccc} 0 & \infty & 0 & 0 \end{array} \right) \\ 4 \left(\begin{array}{cccc} 0 & 0 & \infty & \infty \end{array} \right) \\ 5 \left(\begin{array}{cccc} 19 & 0 & \infty & 0 \end{array} \right) \end{array} \end{array} = \bar{C}_6.$$

Оценка снизу для правого подмножества:

$$d(X_6) = d(X_3) + \Theta(1,4) = 84 + 3 = 87 < Z_0.$$

Левая подматрица. Левое подмножество X_5 будет содержать маршруты, которые всегда включают дугу (4,3), и поэтому четвертая строка и третий столбец в матрицу C_5 не включаются. В результате будем иметь матрицу на единицу меньшего размера. Далее необходимо положить $C_5(5,4) = +\infty$. В результате получим матрицу:

$$C_5 = \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} 1 & 2 & 4 \end{array} \\ \begin{array}{l} 1 \left(\begin{array}{ccc} \infty & 0 & 1 \end{array} \right) \\ 2 \left(\begin{array}{ccc} 0 & \infty & 0 \end{array} \right) \\ 5 \left(\begin{array}{ccc} 19 & 0 & \infty \end{array} \right) \end{array} \end{array} = \bar{C}_5.$$

Оценка снизу для левого подмножества:

$$d(X_5) = d(X_4) + \tau = 84 + 0 = 84 < Z_0.$$

В списке кандидатов на ветвление множества X_5, X_6, X_2, X_4 .

Минимальная нижняя оценка оказалась у множества X_5 , следовательно, для дальнейшего разбиения выбираем множество X_5 . Определим дугу (r,s) с помощью значений функции $\Theta(\mu,\nu)$ для матрицы \bar{C}_5 .

$$\Theta(1,2) = 1, \quad \Theta(2,1) = 19, \quad \Theta(2,4) = 0, \quad \Theta(5,2) = 0, \quad \Theta(5,4) = 0.$$

Следовательно, $\Theta(r,s) = 19$, $(r,s) = (2,1)$.

$$C_8 = \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} 1 & 2 & 4 \end{array} \\ \begin{array}{l} 1 \left(\begin{array}{ccc} \infty & 0 & 1 \end{array} \right) 0 \\ \infty \left(\begin{array}{ccc} \infty & \infty & 0 \end{array} \right) 0 \\ 5 \left(\begin{array}{ccc} 19 & 0 & \infty \end{array} \right) 0 \end{array} \end{array} \sim \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} 1 & 2 & 4 \end{array} \\ \begin{array}{l} 1 \left(\begin{array}{ccc} \infty & 0 & 1 \end{array} \right) \\ \infty \left(\begin{array}{ccc} \infty & \infty & 0 \end{array} \right) \\ 5 \left(\begin{array}{ccc} 19 & 0 & \infty \end{array} \right) \end{array} \end{array} \sim \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} 1 & 2 & 4 \end{array} \\ \begin{array}{l} 1 \left(\begin{array}{ccc} \infty & 0 & 1 \end{array} \right) \\ \infty \left(\begin{array}{ccc} \infty & \infty & 0 \end{array} \right) \\ 5 \left(\begin{array}{ccc} 0 & 0 & \infty \end{array} \right) \end{array} \end{array} = \bar{C}_8.$$

Оценка снизу для правого подмножества:

Решение задач выполнено на сайте МатБюро <https://www.matburo.ru/>

Сделаем на заказ подробно, недорого, ответственно ваши задания:

https://www.matburo.ru/ex_dm.php?p1=dmkom

©МатБюро - Решение задач по математике, экономике, статистике, программированию

$$d(X_8) = d(X_5) + \Theta(5,2) = 84 + 19 = 103 < Z_0.$$

Левая подматрица. Левое подмножество X_7 будет содержать маршруты, которые всегда включают дугу (2,1), и поэтому вторая строка и первый столбец в матрицу C_7 не включаются. В результате будем иметь матрицу на единицу меньшего размера. Далее необходимо положить $C_7(1,2) = +\infty$, чтобы запретить подцикл $\{(1,2), (2,1)\}$.

$$C_7 = \begin{matrix} & 2 & 4 \\ 1 & \left(\begin{array}{cc} \infty & 1 \\ 19 & \infty \end{array} \right) & = \bar{C}_7. \end{matrix}$$

Оценка снизу для левого подмножества:

$$d(X_7) = d(X_5) + \tau = 84 + 0 = 84 < Z_0.$$

В списке кандидатов на ветвление множества X_2, X_4, X_6, X_7, X_8 . Множество X_7 содержит единственный маршрут с минимальной нижней оценкой, поэтому задача решена.

$$X_1 = \{(1,4)(4,3)(3,6), (6,5), (5,2), (2,1)\} = X^*;$$

$$Z_0 = F(x^*) = 11 + 37 + 3 + 24 + 9 + 1 = 84.$$