

Действия с векторами

Пример решения задачи по алгебре

Задача. Найти:

- 1) Проекцию $pr_{\vec{b}} \vec{AB}$;
- 2) Площадь треугольника со сторонами, совпадающими с векторами \vec{a} и \vec{b} ;
- 3) Смешанное произведение $(\vec{b} \cdot \vec{a} \cdot \vec{AB})$;
- 4) При каком λ векторы \vec{AB} и $\vec{a} + \lambda \vec{b}$ ортогональны?

$$\vec{a} = 3\vec{i} - \vec{j} + 2\vec{k}, \vec{b} = \{-1, 2, 1\}, A(0, -2, 1), B(-1, 1, 3).$$

Решение.

Сначала найдем координаты всех необходимых векторов:

$$\vec{a} = 3\vec{i} - \vec{j} + 2\vec{k} = \{3; -1; 2\},$$

$$\vec{b} = \{-1, 2, 1\},$$

$$\vec{AB} = \{-1 - 0; 1 + 2; 3 - 1\} = \{-1; 3; 2\}.$$

1) По определению проекция равна:

$$pr_{\vec{b}} \vec{AB} = \frac{\vec{AB} \cdot \vec{b}}{|\vec{b}|} = \frac{-1 \cdot (-1) + 3 \cdot 2 + 2 \cdot 1}{\sqrt{(-1)^2 + 2^2 + 1^2}} = \frac{1 + 6 + 2}{\sqrt{1 + 4 + 1}} = \frac{9}{\sqrt{6}} = \frac{3}{2} \sqrt{6}.$$

2) Найдем векторное произведение:

$$\vec{a} \times \vec{b} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 3 & -1 & 2 \\ -1 & 2 & 1 \end{vmatrix} = \vec{i} \begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} - \vec{j} \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} + \vec{k} \begin{vmatrix} 3 & -1 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} =$$

$$= \vec{i}(-1-4) - \vec{j}(3+2) + \vec{k}(6-1) = -5\vec{i} - 5\vec{j} + 5\vec{k} = \{-5; -5; 5\}.$$

Тогда площадь треугольника

$$S = \frac{1}{2} |\vec{a} \times \vec{b}| = \frac{1}{2} \sqrt{(-5)^2 + (-5)^2 + 5^2} = \frac{5}{2} \sqrt{3}.$$

3) Найдем смешанное произведение $(\vec{b} \cdot \vec{a} \cdot \vec{AB})$:

$$(\vec{b} \cdot \vec{a} \cdot \vec{AB}) = \begin{vmatrix} -1 & 2 & 1 \\ 3 & -1 & 2 \\ -1 & 3 & 2 \end{vmatrix} = -1 \begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} - 2 \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} + 1 \begin{vmatrix} 3 & -1 \\ -1 & 3 \end{vmatrix} =$$

$$= -1(-2-6) - 2(6+2) + (9-1) = 8 - 16 + 8 = 0.$$

4) Найдем, при каком λ векторы \vec{AB} и $\vec{a} + \lambda \vec{b}$ ортогональны.

Задача скачана с сайта www.MatBuro.ru

Еще примеры: https://www.matburo.ru/ex_ag.php?p1=agvect

©МатБюро - Решение задач по математике, экономике, статистике

Векторы $\overline{AB} = \{-1; 3; 2\}$ и $\overline{a} + \lambda\overline{b} = \{3; -1; 2\} + \lambda\{-1, 2, 1\} = \{3 - \lambda; -1 + 2\lambda; 2 + \lambda\}$ будут ортогональны, если их скалярное произведение равно нулю, то есть:

$$\overline{AB} \cdot (\overline{a} + \lambda\overline{b}) = -1(3 - \lambda) + 3(-1 + 2\lambda) + 2(2 + \lambda) = 0,$$

$$-3 + \lambda - 3 + 6\lambda + 4 + 2\lambda = 0,$$

$$9\lambda = 2,$$

$$\lambda = 2/9.$$