

### Решенная задача на тему: отношение эквивалентности

ЗАДАНИЕ.

Дано множество  $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$  и бинарное отношение  $R \subset A \times A$ :

$$R = \begin{matrix} & \begin{matrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \end{matrix} \\ \begin{matrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \end{matrix} & \begin{bmatrix} 1 & a_0 & a_1 & a_2 & a_3 \\ a_0 & 1 & a_4 & a_5 & a_6 \\ a_1 & a_4 & 1 & a_7 & a_8 \\ a_2 & a_5 & a_7 & 1 & a_9 \\ a_3 & a_6 & a_8 & a_9 & 1 \end{bmatrix} \end{matrix}$$

Проверить, является ли  $R$  отношением эквивалентности. Добавить минимальное возможное число пар, чтобы  $R$  стало отношением эквивалентности. Найти разбиение  $P$ .

РЕШЕНИЕ.

Выпишем матрицу отношения по индивидуальному коду

$$51366_{10} = 1100100010100110_2:$$

$$R = \begin{matrix} & \begin{matrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \end{matrix} \\ \begin{matrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \end{matrix} & \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \end{matrix},$$

$$R = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Проверим, является ли  $R$  отношением эквивалентности. Отношение будет эквивалентностью, если оно рефлексивно, симметрично и транзитивно.

Отношение  $R$  рефлексивно, так как на главной диагонали матрицы стоят единицы.

Отношение  $R$  симметрично, так как матрица отношения симметрична относительно главной диагонали.

Проверим транзитивность. Для этого выпишем отношение в явном виде:

$$R = \{(1,1), (1,3), (1,4), (2,2), (2,4), (3,1), (3,3), (3,4), (4,1), (4,2), (4,3), (4,4), (5,5)\}$$

Отношение не транзитивно, так как, например,

$$(1,4) \in R, (4,2) \in R, \text{ но } (1,2) \notin R.$$

Дополним его до транзитивного. Вводим пару  $(1,2)$ .

$$\tilde{R} = \left\{ \begin{array}{l} (1,1), (1,2), (1,3), (1,4), (2,2), (2,4), (3,1), (3,3), (3,4), \\ (4,1), (4,2), (4,3), (4,4), (5,5) \end{array} \right\}$$

Ищем еще пары, на которых транзитивность не выполняется, добавляем нужные пары:

$$(2,4), (4,1) \Rightarrow (2,1),$$

$$(2,4), (4,3) \Rightarrow (2,3),$$

$$(3,1), (1,2) \Rightarrow (3,2).$$

$$\tilde{R} = \left\{ \begin{array}{l} (1,1), (1,2), (1,3), (1,4), (2,1), (2,2), (2,3), (2,4), (3,1), (3,2), \\ (3,3), (3,4), (4,1), (4,2), (4,3), (4,4), (5,5) \end{array} \right\}.$$

Найдем разбиение  $P$ , которое порождается данным отношением эквивалентности:

$$P = \left\{ \begin{array}{l} (1,1), (1,2), (1,3), (1,4), (2,1), (2,2), (2,3), (2,4), (3,1), (3,2), \\ (3,3), (3,4), (4,1), (4,2), (4,3), (4,4) \end{array} \right\} \cup \{(5,5)\}$$