Бинарные отношения: задача с решением

ЗАДАНИЕ.

Найти область определения, область значений отношения P. Является ли отношение P рефлексивным, симметричным, антисимметричным, транзитивным.
$P \subseteq Z^2, <x,y> \in P \Leftrightarrow x^2+y^2=1$.

РЕШЕНИЕ.

Так как отношение определено на множестве целых точек плоскости ($P \subseteq Z^2$), можно легко представить его графически.

Представляем на плоскости окружность $x^2+y^2=1$ радиуса 1 с центром в начале координат. Выделяем целые точки, которые на ней лежат. Это, очевидно: $P=\{<0,1>, <1,0>, <0,-1>, <-1,0>\}$.

Область определения отношения P тогда равна $D(P)=\{-1;0;1\}$.
Область значения отношения P равна $E(P)=\{-1;0;1\}$.

Отношение не является рефлексивным, так как ни для каких целых $x \in Z$ не выполняется, что $x^2+x^2=1$, так как в таком случае $x=\pm\frac{1}{\sqrt{2}} \notin Z$.
Отношение является симметричным, так как для любых $x,y \in Z$, таких что $<x,y> \in P$ (то есть $x^2+y^2=1$), верно, что $<y,x> \in P$ (то есть $y^2+x^2=1$).

Отношение не является антисимметричным.

Отношение не является транзитивным, так как для любых $x,y,t \in Z$, таких что $<x,y> \in P, <y,t> \in P$ (то есть $x^2+y^2=1,\ y^2+t^2=1$), не следует, что $<x,t> \in P$ (то есть $x^2+t^2=1$). Действительно, если $x^2+y^2=1,\ y^2+t^2=1$, то отсюда $x^2=t^2$, поэтому $x^2+t^2=2t^2=1,\ t=\pm\frac{1}{\sqrt{2}} \notin Z$.

Также эти свойства отношения можно было получить, опираясь на явный вид отношения: $P=\{<0,1>, <1,0>, <0,-1>, <-1,0>\}$.