

## Собственные значения и вектора матрицы

### Пример решения задачи по алгебре

**Задача.** Найти собственные значения и собственные векторы матрицы

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

**Решение.**

Обозначим:  $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ .

Решим характеристическое уравнение:

$$\begin{aligned} |A - \lambda E| &= \begin{vmatrix} 2-\lambda & 0 & 1 \\ 1 & 1-\lambda & 1 \\ 1 & 0 & 2-\lambda \end{vmatrix} = (1-\lambda) \begin{vmatrix} 2-\lambda & 1 \\ 1 & 2-\lambda \end{vmatrix} = (1-\lambda)((2-\lambda)^2 - 1) \\ &= (1-\lambda)(2-\lambda-1)(2-\lambda+1) = (1-\lambda)(1-\lambda)(3-\lambda) = 0. \end{aligned}$$

Решая уравнение, находим собственные значения  $\lambda_{1,2} = 1$  (кратности 2),  $\lambda_3 = 3$  (кратности 1). Найдем соответствующие собственные векторы.

Пусть  $\lambda_{1,2} = 1$ . Решаем систему

$$\begin{cases} x + z = 0, \\ x + z = 0, \\ x + z = 0, \end{cases} \quad \begin{cases} x = x, \\ y = y, \\ z = -x. \end{cases}$$

Собственные векторы:  $X_1 = C_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$ ,  $X_2 = C_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ .

Пусть  $\lambda_3 = 3$ . Решаем систему

$$\begin{cases} -x + z = 0, \\ x - 2y + z = 0, \\ x - z = 0, \end{cases} \quad \begin{cases} x = x, \\ y = x, \\ z = x. \end{cases}$$

Собственный вектор:  $X_3 = C_3 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$