

Составление двойственной задачи линейного программирования

ЗАДАНИЕ. Записать математическую модель двойственной ЗЛП по заданной прямой:

$$F = 2x_1 - 3x_2 - 2x_3 + x_4 \rightarrow \min,$$

$$\begin{cases} -2x_1 + 4x_2 + x_3 - x_4 \leq 2 \\ x_1 - 2x_2 + 3x_3 - 4x_4 = 5 \\ 3x_1 - 5x_2 - x_3 \geq 1 \\ x_2 \geq 0; x_4 \geq 0 \end{cases}$$

РЕШЕНИЕ.

Т.к. прямая задача является задачей минимизации, двойственная задача будет задачей максимизации.

Система ограничений прямой задачи состоит из трёх ограничений.

Следовательно, в двойственной задаче будут три переменные u_1, u_2, u_3 .

Систему ограничений прямой задачи надо вначале привести к стандартному виду, т.е. в задаче на минимум все ограничения должны быть вида \geq или $=$. Тогда в двойственной задаче на максимум все ограничения будут вида \leq или $=$.

$$\begin{cases} 2x_1 - 4x_2 - x_3 + x_4 \geq -2 \\ x_1 - 2x_2 + 3x_3 - 4x_4 = 5 \\ 3x_1 - 5x_2 - x_3 \geq 1 \\ x_2 \geq 0; x_4 \geq 0 \end{cases}$$

Составляем систему ограничений двойственной задачи.

Матрица коэффициентов при неизвестных в неравенствах двойственной задачи получается транспонированием матрицы коэффициентов прямой задачи, неравенства меняются на противоположные, а свободные члены совпадают с коэффициентами целевой функции прямой задачи.

Если переменная прямой задачи $x_i \geq 0$, то i -е условие системы ограничений двойственной задачи является неравенством, если x_i – любое число, то i -е условие двойственной задачи представляет собой уравнение.

Если j -е соотношение прямой задачи является неравенством, то соответствующая оценка j -го ресурса – переменная $y_j \geq 0$, если j -е соотношение представляет собой уравнение, то переменная двойственной задачи y_j – любое число.

Следовательно, система ограничений двойственной задачи имеет вид:

$$\begin{cases} 2y_1 + y_2 + 3y_3 = 2 \\ -4y_1 - 2y_2 - 5y_3 \leq -3 \\ -y_1 + 3y_2 - y_3 = -2 \\ y_1 - 4y_2 \leq 1 \\ y_1 \geq 0, \quad y_3 \geq 0 \end{cases}$$

Коэффициентами в целевой функции двойственной задачи будут свободные члены в системе ограничений прямой задачи.

Записываем математическую модель двойственной ЗЛП:

Целевая функция двойственной задачи:

$$F(Y) = -2y_1 + 5y_2 + y_3 \rightarrow \max$$

Ограничения:

$$\begin{cases} 2y_1 + y_2 + 3y_3 = 2 \\ -4y_1 - 2y_2 - 5y_3 \leq -3 \\ -y_1 + 3y_2 - y_3 = -2 \\ y_1 - 4y_2 \leq 1 \\ y_1 \geq 0, \quad y_3 \geq 0 \end{cases}$$