Тема: Графический метод решения задачи линейного программирования с n переменными

ЗАДАНИЕ. *Решить графическим методом задачу с n переменными*

$$Z(X) = x_1 + x_2 + 3x_3 + 4x_4 \to \min,$$

$$\begin{cases} 5x_1 - 6x_2 + x_3 - 2x_4 = 2, \\ 11x_1 - 14x_2 + 2x_3 - 5x_4 = 2, \end{cases}$$

$$x_j \geq 0,\ j = 1, 2, 3, 4.$$

РЕШЕНИЕ.

Так как число переменных в задаче равно 4, в исходной постановке задача графическим методом не решается.

Сведем эту задачу к задаче с двумя переменными.

Рассмотрим систему ограничений задачи:

$$\begin{cases} 5x_1 - 6x_2 + x_3 - 2x_4 = 2, \\ 11x_1 - 14x_2 + 2x_3 - 5x_4 = 2, \end{cases}$$

Выразим какие-либо две переменные задачи через остальные две переменные.

$$\begin{cases} x_3 = 6 - 3x_1 + 2x_2, \\ x_4 = 2 + x_1 - 2x_2. \end{cases}$$

Нашли искомые выражения. Подставляем их в целевую функцию:

$$Z(x) = x_1 + x_2 + 3(6 - 3x_1 + 2x_2) + 4(2 + x_1 - 2x_2) = -4x_1 - x_2 + 26$$

Так как по условию задачи $x_3, x_4 \geq 0$, получаем ограничения:

$$\begin{cases} x_3 = 6 - 3x_1 + 2x_2 \geq 0, \\ x_4 = 2 + x_1 - 2x_2 \geq 0. \end{cases}$$

Приходим к задаче линейного программирования с двумя переменными:

$$Z = -4x_1 - x_2 + 26 \to \min,$$

$$\begin{cases} 3x_1 - 2x_2 \leq 6, \\ -x_1 + 2x_2 \leq 2, \end{cases}$$

$$x_1, x_2 \geq 0.$$

Решаем данную задачу графическим методом. Строим область допустимых решений в плоскости x_1Ox_2, ограниченную неравенствами:

$$\begin{cases} 3x_1 - 2x_2 \leq 6, \\ -x_1 + 2x_2 \leq 2, \end{cases}$$

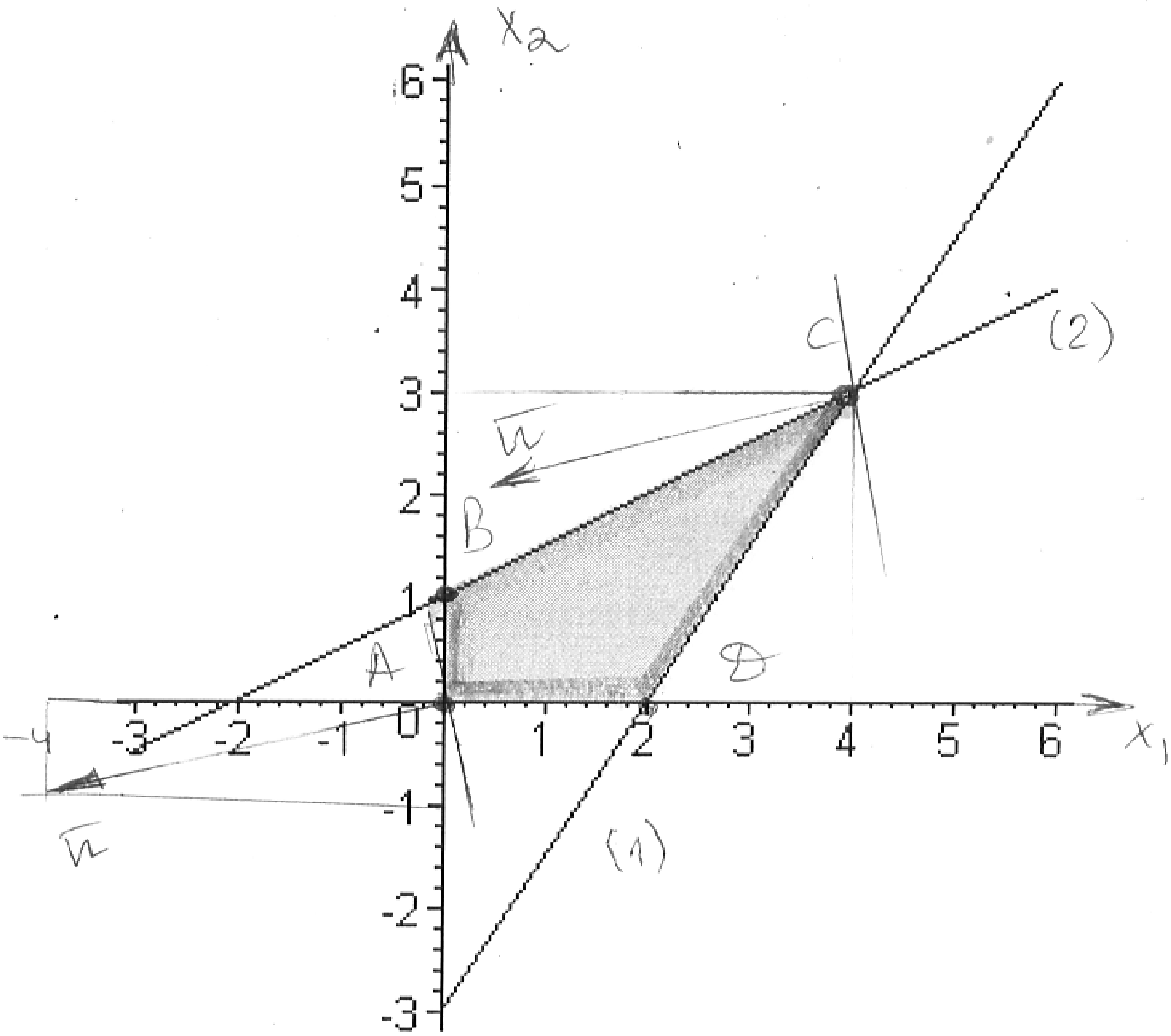
$$x_1, x_2 \geq 0.$$

Для этого строим линии:

(1) $3x_1 - 2x_2 = 6$, прямая проходит через точки (2,0) и (4, 3)

(2) $-x_1 + 2x_2 = 2$, , прямая проходит через точки (0, 1), (2, 2).

Получаем замкнутую область $ABCD$ (см. рисунок ниже).



Строим линию уровня целевой функции $-4x_1 - x_2 = 0$ и вектор градиента $\bar{n} = (-4;-1)$. Направление градиента – направление наибольшего роста функции. Двигаем линию уровня в противоположном направлении, пока не достигнем крайней точки области. Ясно, что минимальное значение функция примет в точке $C(4,3)$. Тогда получаем для исходной задачи:

$$\begin{cases} x_1 = 4, \\ x_2 = 3, \\ x_3 = 6 - 12 + 6 = 0, \\ x_4 = 2 + 4 - 6 = 0. \end{cases}$$

Решение: $X = (4,3,0,0)$, минимум целевой функции равен $Z_{\min} = 7$.