Тема: Полное исследование функции с помощью производных

Задание. *Исследовать функцию и построить ее график*

$$y = x^{1/x}.$$

Решение:

1) Область определения функции: $(0;\ +\infty)$, так как показательная функция определяется для неотрицательного основания, и $x \neq 0$.

$$\lim_{x\to 0+0} y = \lim_{x\to 0+0} x^{1/x} = \lim_{x\to 0+0} e^{\ln x^{1/x}} = \lim_{x\to 0+0} e^{\frac{1}{x}\ln x} = \exp\left(\lim_{x\to 0+0}\frac{\ln x}{x}\right)$$

$$\lim_{x\to 0+0}\frac{\ln x}{x} = [\ln x \to -\infty] = -\infty$$

$$\lim_{x\to 0+0} y = \exp\left(\lim_{x\to 0+0}\frac{\ln x}{x}\right) = 0$$

2) Функция непериодическая. Область определения несимметрична, функция общего вида, график функции не обладает симметрией.

3) На интервале $(0;\ +\infty)$ функция непрерывна.

4) Определим нули функции и области постоянства знака.
Уравнение $y = 0$ не имеет корней, при $x > 0$: $y > 0$.

5) Найдем точки экстремума и выясним промежутки возрастания и убывания функции.

$$y = x^{1/x};\ \ln y = \ln x^{1/x} = \frac{\ln x}{x}$$

$$(\ln y)' = \left(\frac{\ln x}{x}\right)';\ \frac{1}{y}\cdot y' = \frac{\frac{1}{x}\cdot x - \ln x}{x^2} = \frac{1-\ln x}{x^2}$$

$$y' = y\cdot\frac{1-\ln x}{x^2} = x^{1/x}\cdot\frac{1-\ln x}{x^2}$$

$$y' = 0 \to 1 - \ln x = 0 \to \quad x = e \approx 2.72$$

При $0 < x < e$: $y' > 0$, функция возрастает. При $x > e$: $y' < 0$, функция убывает.
$x = e$ – точка максимума (локального и глобального),

$$y(e) = (e)^{1/e} = e^{e^{-1}} \approx 1.44$$

6) Найдем точки перегиба и установим промежутки вогнутости определенного знака графика функции.

$$y'' = \left(x^{1/x}\right)'\cdot\frac{1-\ln x}{x^2} + x^{1/x}\cdot\left(\frac{1-\ln x}{x^2}\right)' =$$

$$= x^{1/x}\cdot\frac{1-\ln x}{x^2}\cdot\frac{1-\ln x}{x^2}+x^{\frac{1}{x}}\cdot\frac{-\frac{1}{x}\cdot x^2-(1-\ln x)\cdot 2x}{x^4}=$$
$$= x^{\frac{1}{x}}\cdot\frac{(1-\ln x)^2-x-2x+2x\ln x}{x^4}=x^{\frac{1}{x}}\cdot\frac{1-3x+2(x-1)\ln x+\ln^2 x}{x^4}$$
$$y''=0\to\ \ 1-3x+2(x-1)\ln x+\ln^2 x=0\to\ \ x\approx 0.58, x\approx 4.37$$

Кроме того, вторая производная не определена в точке $x=0$. При $0<x<0.58$ имеем $y''>0$, функция вогнута, при $0.58<x<4.37$: $y''<0$, функция выпукла, при $x>4.37$: $y''>0$, функция вогнута. $x\approx 0.58, x\approx 4.37$ – точки перегиба,

$$y(0.58)\approx 0.39; y(4.37)\approx 1.40.$$

7) На всей области определения функция непрерывна, в точке $x=0$ односторонний предел конечный. Вертикальных асимптот нет.

Исследуем поведение функции на бесконечности.

$$\lim_{x\to+\infty} y=\lim_{x\to+\infty} x^{1/x}=(\infty^0)=\lim_{x\to+\infty} e^{\ln x^{1/x}}=\lim_{x\to+\infty} e^{\frac{\ln x}{x}}=\exp\left(\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln x}{x}\right)$$
$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln x}{x}=\left(\frac{\infty}{\infty}\right)=\begin{bmatrix}\text{правило}\\ \text{Лопиталя}\end{bmatrix}=\lim_{x\to+\infty}\frac{1/x}{1}=0$$
$$\lim_{x\to+\infty} y=\exp\left(\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln x}{x}\right)=e^0=1$$

Прямая $y=1$ – горизонтальная асимптота.