Тема: Полное исследование функции с помощью производных

Задание. *Провести полное исследование функции f(x) и построить график функции.*

$f(x) = x - \operatorname{arctg} 2x$

1. Установить область определения функции.
2. Установить чётность нечётность функции, периодичность.
3. Найти нули функции, указать интервалы возрастания и убывания.
4. Провести исследование на экстремум, найти точки локальных max и min.
5.Установить выпуклость и вогнутость, точки перегиба.
6. Найти уравнение асимптот
7. Построить график функции

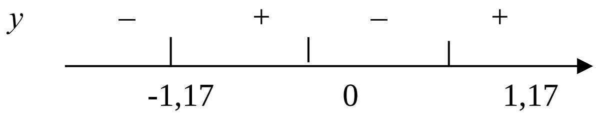
Решение:

1) Область определения - вся числовая прямая $D(y) = (-\infty; +\infty)$.
Точек разрыва нет.

2) Функция нечетная, так как
$y = -x - \operatorname{arctg}(-2x) = -(x - \operatorname{arctg} 2x) = -y(x)$.
График функции симметричен относительно начала координат.

3) Точки пересечения графика функции с осями координат
Ox. $y = x - \operatorname{arctg} 2x = 0$, $x = 0$, $x = \pm 1{,}17$, точки (0; 0), $(\pm 1{,}17;\ 0)$.
Oy. $x = 0 \Rightarrow y = 0$, точка (0,0).

Таким образом, нули функции $x = 0$, $x = \pm 1{,}17$. Знаки функции отображены ниже.

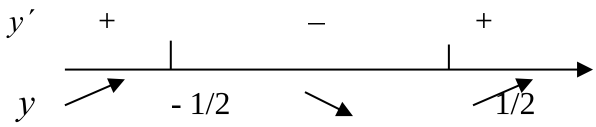


Интервалы возрастания и убывания укажем в следующем пункте.

4) Экстремумы и промежутки монотонности функции.
Вычисляем первую производную:

$$y' = 1 - \frac{2}{1+4x^2} = \frac{1+4x^2-2}{1+4x^2} = \frac{4x^2-1}{1+x^2} = 0.$$

Критические точки (производная обращается в нуль): $x_1 = -1/2, x_2 = 1/2$.



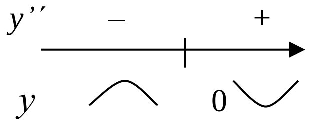
Функция возрастает на интервалах $(-\infty;-1/2),(1/2;+\infty)$. Функция убывает на интервале $(-1/2;1/2)$. Функция имеет минимум при $x=1/2$, $y(1/2)=\frac{1}{2}-\operatorname{arctg}1=\frac{1}{2}-\frac{\pi}{4}\approx-0,29$.

Функция имеет максимум при $x=-1/2$, $y(-1/2)=-\frac{1}{2}+\operatorname{arctg}1\approx 0,29$.

5) Точки перегиба и интервалы выпуклости и вогнутости.
Вычисляем вторую производную:

$$y''=\left(1-\frac{2}{1+4x^2}\right)'=0-(-1)\frac{2}{(1+4x^2)^2}8x=\frac{16x}{\left(1+4x^2\right)^2}=0$$

Критическая точка: $x=0$. Исследуем знак производной на интервалах, на которые критические точки делят области определения функции.



Функция выпукла вниз на интервале $(0;+\infty)$, выпукла вверх на интервале $(-\infty;0)$.
Точки перегиба: $x=0, y(0)=0$.

6) Вертикальных асимптот нет.
Найдем наклонные асимптоты вида $y=kx+b$.

$$k=\lim_{x\to\infty}\frac{y}{x}=\lim_{x\to\infty}\frac{x-\operatorname{arctg}2x}{x}=\lim_{x\to\infty}\left(1-\frac{1}{x}\operatorname{arctg}2x\right)=1-\lim_{x\to\infty}\frac{\operatorname{arctg}2x}{x}=1.$$

$$b=\lim_{x\to\infty}(y-kx)=\lim_{x\to\infty}(x-\operatorname{arctg}2x-x)=-\lim_{x\to\infty}\operatorname{arctg}2x=-\frac{\pi}{2}$$

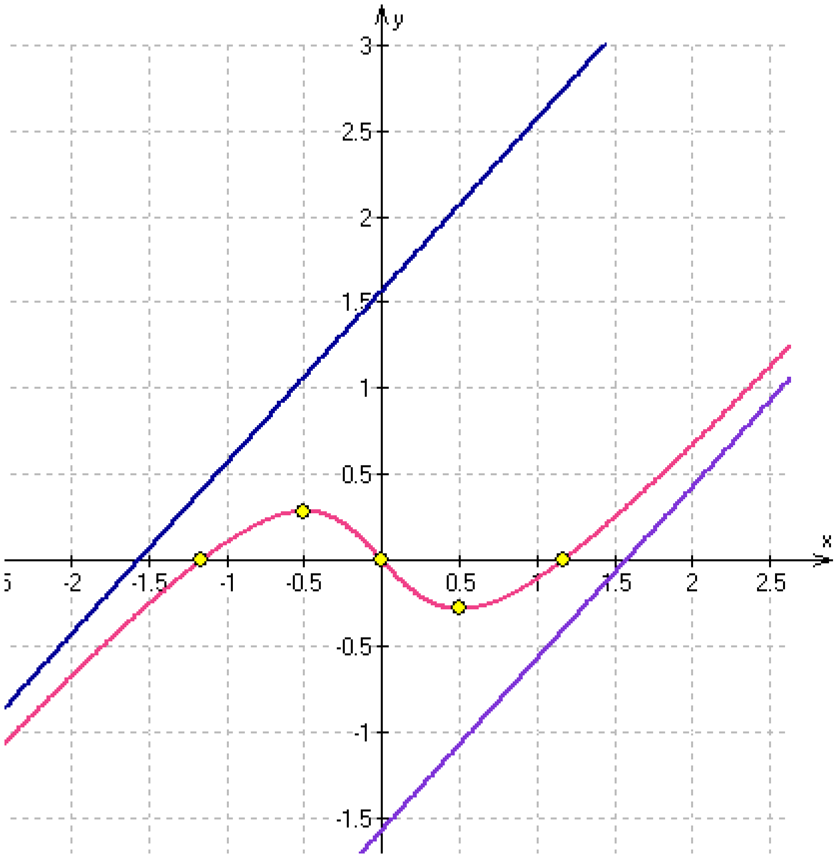
Наклонная асимптота $y=x-\frac{\pi}{2}$.

$$k=\lim_{x\to-\infty}\frac{y}{x}=\lim_{x\to-\infty}\frac{x-\operatorname{arctg}2x}{x}=\lim_{x\to-\infty}\left(1-\frac{1}{x}\operatorname{arctg}2x\right)=1$$

$$b=\lim_{x\to-\infty}(y-kx)=\lim_{x\to-\infty}(x-\operatorname{arctg}2x-x)=-\lim_{x\to-\infty}\operatorname{arctg}2x=\frac{\pi}{2}$$

Наклонная асимптота $y=x+\frac{\pi}{2}$.

7) Строим график функции и асимптоты.


y
x
3
2.5
2
1.5
1
0.5
-0.5
-1
-1.5
-2
-1.5
-1
-0.5
0.5
1
1.5
2
2.5