Тема: Полное исследование функции с помощью производных

Задание. *Проведите полное исследование функции и постройте график*

$$y = x^2 e^{-\frac{x^2}{2}}$$

Решение:

1. Область определения – вся числовая прямая, то есть $D(y) = (-\infty; +\infty)$. Точек разрыва нет, вертикальных асимптот нет, функция непрерывна на всей числовой прямой.

2. Точки пересечения графика с осями координат:
Ox: $y = x^2 e^{-x^2/2} = 0, \Rightarrow x = 0$, точка (0,0).
Oy: $x = 0, \Rightarrow y = 0$, точка (0,0).

3. Асимптоты графика.
Вертикальных асимптот нет.
Найдем наклонные асимптоты вида $y = kx + b$:

$$k = \lim_{x\to\infty} \frac{y}{x} = \lim_{x\to\infty} \frac{x^2 e^{-x^2/2}}{x} = \lim_{x\to\infty} x e^{-x^2/2} = \lim_{x\to\infty} \frac{x}{e^{x^2/2}} = \lim_{x\to\infty} \frac{1}{x e^{x^2/2}} = 0$$

$$b = \lim_{x\to\infty} (y - kx) = \lim_{x\to\infty} x^2 e^{-x^2/2} = \lim_{x\to\infty} \frac{x^2}{e^{x^2/2}} = \lim_{x\to\infty} \frac{2x}{x e^{x^2/2}} = \lim_{x\to\infty} \frac{2}{e^{x^2/2}} = 0$$

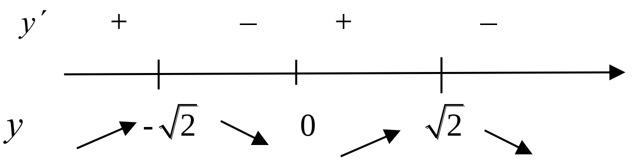
То есть, горизонтальная асимптота $y = 0$.

4. Функция четная, так как $y(-x) = (-x)^2 e^{-(-x)^2/2} = x^2 e^{-x^2/2} = y(x)$. График функции симметричен относительно оси Oy.

5. Монотонность, экстремумы.
Рассмотрим первую производную:

$$y' = \left(x^2 e^{-x^2/2}\right)' = e^{-x^2/2}(2x + x^2(-x)) = e^{-x^2/2}(2x - x^3) = x e^{-x^2/2}(2 - x^2).$$

Приравняем к нулю и получим стационарные точки: $x = 0,\ x = \sqrt{2},\ x = -\sqrt{2}.$



Функция возрастает на интервалах $(-\infty; -\sqrt{2}),\ (0; \sqrt{2})$, убывает на интервалах $(-\sqrt{2}; 0),\ (\sqrt{2}; +\infty)$. Функция имеет максимум при $x = \mp\sqrt{2}$,

$$y(\mp\sqrt{2}) = \left(\sqrt{2}\right)^2 e^{-\left(\sqrt{2}\right)^2/2} = \frac{2}{e} \approx 0{,}74$$, минимум при $x = 0$, $y(0) = 0.$

6. Выпуклость, точки перегиба.

Рассмотрим вторую производную:

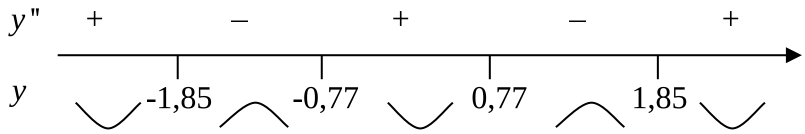
$$y''=\left(e^{-x^2/2}(2x-x^3)\right)'=e^{-x^2/2}\left(2-3x^2+\left(2x-x^3\right)(-x)\right)=e^{-x^2/2}\left(2-3x^2-x^2+x^4\right)=$$

$$=e^{-x^2/2}\left(2-4x^2+x^4\right)=e^{-x^2/2}\left(4-4x^2+x^4-2\right)=e^{-x^2/2}\left(\left(x^2-2\right)^2-2\right)=$$

$$=e^{-x^2/2}\left(x^2-2-\sqrt{2}\right)\left(x^2-2+\sqrt{2}\right)$$

Приравниваем к нулю и получаем точки:

$$x=-\sqrt{2+\sqrt{2}}\approx -1,85,\quad x=\sqrt{2+\sqrt{2}}\approx 1,85,$$
$$x=-\sqrt{2-\sqrt{2}}\approx -0,77,\quad x=\sqrt{2-\sqrt{2}}\approx 0,77.$$



Это точки перегиба.

$$y\left(\pm\sqrt{2+\sqrt{2}}\right)\approx 0,62,\quad y\left(\pm\sqrt{2-\sqrt{2}}\right)\approx 0,44$$

7. Строим график, отмечаем экстремумы и перегибы.