Тема: Полное исследование функции с помощью производных

Задание. *Проведите полное исследование функции и постройте график*

$$y=\frac{x^2-x+4}{2x}$$

Решение:

1) Область определения функции: $x\neq 0$, то есть $D(y)=(-\infty;0)\cup(0;\infty)$.

$x=0$ - вертикальная асимптота.

2) Точки пересечения с осями координат

Ох: $y=\dfrac{x^2-x+4}{2x}=0$, точек нет.

Оу: $x=0\notin D(y)$. Точек нет.

3) Функция общего вида, так как

$$y(-x)=\frac{(-x)^2-(-x)+4}{2(-x)}=-\frac{x^2+x+4}{2x}\neq \pm y(x).$$

4) Точки экстремума, монотонность.

$$y'=\left(\frac{x^2-x+4}{2x}\right)'=\frac{1}{2}\frac{(2x-1)x-\left(x^2-x+4\right)}{x^2}=\frac{1}{2}\frac{2x^2-x-x^2+x-4}{x^2}=$$

$$=\frac{1}{2}\frac{x^2-4}{x^2}=\frac{1}{2}\frac{(x-2)(x+2)}{x^2}.$$

Критические точки: $x=-2$, $x=2$, $x=0$.

y'	+		–		–		+
y	↗	-2	↘	0	↘	2	↗

Функция возрастает на интервалах $(-\infty;-2),\ (2;+\infty)$, убывает на интервалах $(-2;0),\ (0;2)$.

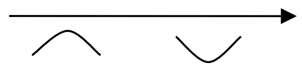
Функция имеет минимум при $x=2$, $y(2)=1{,}5$, максимум при $x=-2$, $y(-2)=-2{,}5$.

5) Выпуклость, точки перегиба.

$$y''=\left(\frac{1}{2}\frac{x^2-4}{x^2}\right)'=\frac{1}{2}\left(1-\frac{4}{x^2}\right)'=\frac{1}{2}\left(0-(-2)\frac{4}{x^3}\right)=\frac{4}{x^3}$$

Критическая точка: $x=0$

y'' – 0 +



Функция выпукла вверх на интервале $(-\infty;0)$, выпукла вниз на интервале $(0;+\infty)$.

6) Наклонные асимптоты вида $y=kx+b$.

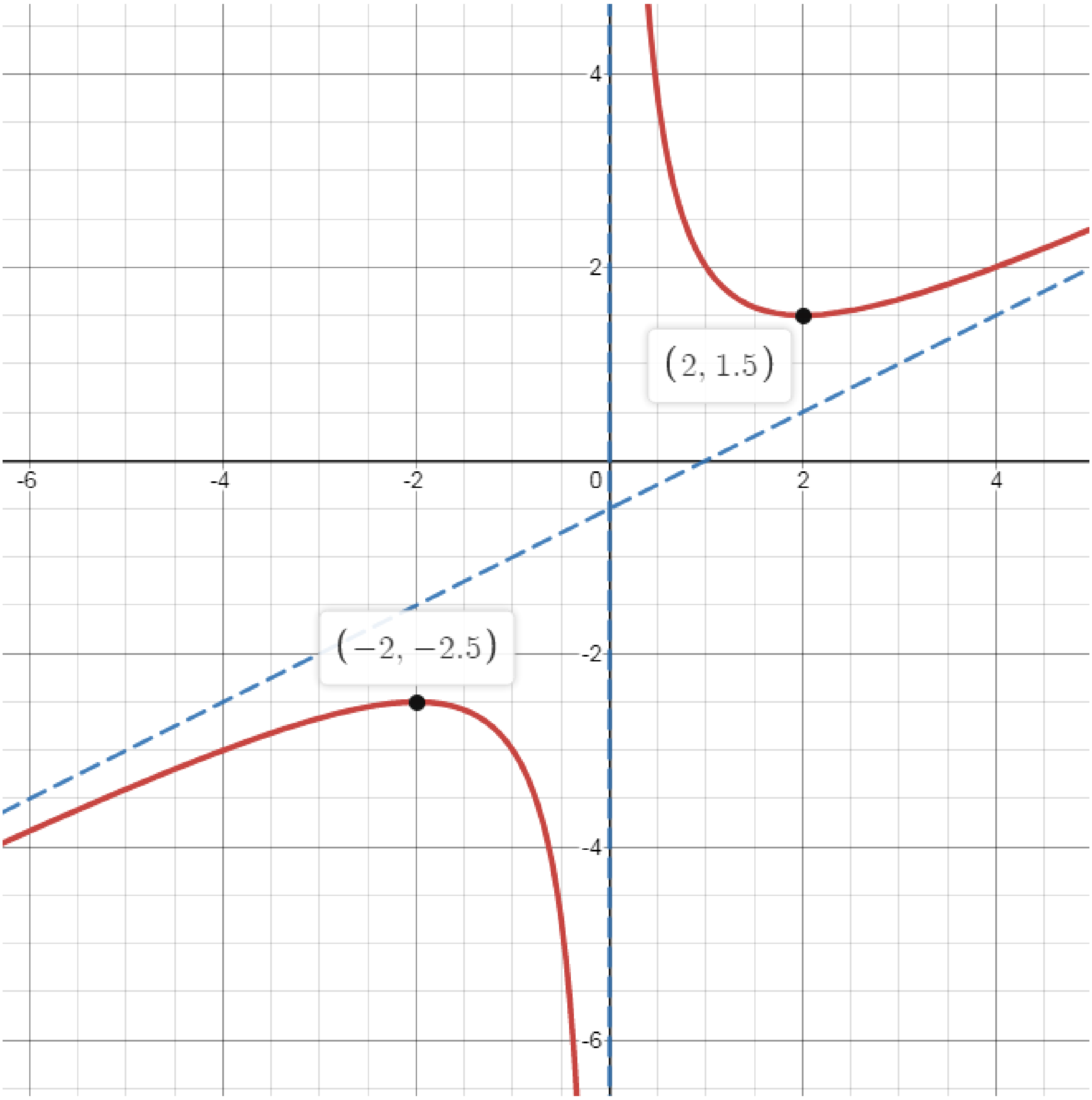
$$k=\lim_{x\to\infty}\frac{y}{x}=\lim_{x\to\infty}\frac{x^2-x+4}{2x^2}=\lim_{x\to\infty}\frac{1-1/x+4/x^2}{2}=\frac{1}{2},$$

$$b=\lim_{x\to\infty}(y-kx)=\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x^2-x+4}{2x}-\frac{1}{2}x\right)=\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x^2-x+4-x^2}{2x}\right)=$$

$$=\lim_{x\to\infty}\left(\frac{-x+4}{2x}\right)=\lim_{x\to\infty}\left(\frac{-1+4/x}{2}\right)=-\frac{1}{2}.$$

Таким образом, наклонная асимптота $y=\frac{1}{2}x-\frac{1}{2}$.

7) Строим график, асимптоты, отмечаем точки экстремумов:


(2, 1.5)
(−2, −2.5)
4
2
-2
-4
-6
-6
-4
-2
0
2
4