Тема: Полное исследование функции

ЗАДАНИЕ. *Проведите полное исследование функции и постройте график*

$$y=\frac{2x-x^3}{(4-x^2)(x+1)}$$

РЕШЕНИЕ:

1. Область определения функции: $x\in(-\infty;-2)\cup(-2;-1)\cup(-1;2)\cup(2;+\infty)$.

2. Периодичность – функция не является периодической.

3. Четность/нечетность: $y(-x)=\dfrac{2(-x)-(-x)^3}{(4-(-x)^2)(-x+1)}=\dfrac{2x-x^3}{(4-x^2)(x-1)}\neq\pm y(x)-$ функция общего вида.

4. Пересечение с осями координат и промежутки знакопостоянства.
Найдем точки пересечения с осями координат:
а) с осью абсцисс: $y=0\Rightarrow 2x-x^3=0\Rightarrow x=0$, $x=\pm\sqrt{2}$.
б) с осью ординат: $x=0\Rightarrow y=0$.
Промежутки знакопостоянства функции.

x	$-\infty<x<-2$	$-2<x<-\sqrt{2}$	$-\sqrt{2}<x<-1$	$-1<x<0$	$0<x<\sqrt{2}$	$\sqrt{2}<x<2$	$2<x<+\infty$
y	+	–	+	–	+	–	+

5. Точки разрыва.
Функция терпит разрыв в точках $x=\pm 2$, $x=-1$, исследуем их:

$$\lim_{x\to-2-0}\frac{2x-x^3}{(4-x^2)(x+1)}=+\infty,\quad \lim_{x\to-2+0}\frac{2x-x^3}{(4-x^2)(x+1)}=-\infty, \text{ разрыв 2 рода;}$$

$$\lim_{x\to-1-0}\frac{2x-x^3}{(4-x^2)(x+1)}=+\infty,\quad \lim_{x\to-1+0}\frac{2x-x^3}{(4-x^2)(x+1)}=-\infty, \text{ разрыв 2 рода;}$$

$$\lim_{x\to2-0}\frac{2x-x^3}{(4-x^2)(x+1)}=-\infty,\quad \lim_{x\to2+0}\frac{2x-x^3}{(4-x^2)(x+1)}=+\infty, \text{ разрыв 2 рода.}$$

6. Асимптоты.
а) Вертикальные асимптоты: $x=\pm 2$, $x=-1$.
б) Наклонные асимптоты: $y=kx+b-$ общее уравнение наклонных асимптот:

$$k=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{y}{x}=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{2-x^2}{(4-x^2)(x+1)}=0;$$

$$b=\lim_{x\to\pm\infty}(y-kx)=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{2x-x^3}{(4-x^2)(x+1)}=1.$$

$y=1-$ горизонтальные асимптоты при $x\to\pm\infty$.

7. Монотонность и экстремумы.

Найдем производную функции:

$$y'=\left[\frac{2x-x^3}{(4-x^2)(x+1)}\right]'=\frac{(2-3x^2)(4-x^2)(x+1)-(2x-x^3)(-2x(x+1)+4-x^2)}{\left((4-x^2)(x+1)\right)^2}=\frac{x^4-4x^3-10x^2+8}{(x^2-4)^2(x+1)^2}.$$

Найдем критические точки:

$y'=0:\ x^4-4x^3-10x^2+8=0\Rightarrow x\approx 0{,}798,\ x\approx 5{,}709$.

Промежутки монотонности.

x	$-\infty<x<-2$	$-2<x<-1$	$-1<x<0{,}798$	$0{,}798<x<2$	$2<x<5{,}709$	$5{,}709<x<+\infty$
y'	+	+	+	−	−	+
y	↑	↑	↑	↓	↓	↑

$x=0{,}798-$ точка «гладкого» максимума;

$x=5{,}709-$ точка «гладкого» минимума.

8. Промежутки выпуклости/вогнутости функции и точки перегиба.

Найдем вторую производную функции:

$$y''=\left[\frac{x^4-4x^3-10x^2+8}{(x^2-4)^2(x+1)^2}\right]'=$$

$$=\frac{(4x^3-12x^2-20x)(x^2-9)^2(x+1)^2-(x^4-4x^3-10x^2+8)\cdot 2(x^2-4)(x+1)(2x(x+1)+(x^2-4))}{\left((x^2-4)^2(x+1)^2\right)^2}=$$

$$=\frac{2(x^6-6x^5-18x^4-10x^3-24x-32)}{(x^2-4)^3(x+1)^3}.$$

Найдем критические точки:

$y''=0:\ x^6-6x^5-18x^4-10x^3-24x-32=0\Rightarrow x\approx -1{,}409,\ x\approx 8{,}315$.

Отметим промежутки выпуклости/вогнутости функции.

x	$-\infty<x<-2$	$-2<x<-1{,}409$	$-1{,}409<x<-1$	$-1<x<2$	$2<x<8{,}315$	$8{,}315<x<+\infty$
y	+	−	+	−	+	−

″						
y	$\cup$	$\cap$	$\cup$	$\cap$	$\cup$	$\cap$

$x \approx -1{,}409$, $x \approx 8{,}315$ – точки перегиба.

9. График функции.