Тема: Полное исследование функции

Задание. *Проведите полное исследование функции и постройте график*

$$y=\frac{-9x-2}{x^2-8x+16}$$

Решение:

$$y=\frac{-9x-2}{x^2-8x+16}=-\frac{9x+2}{(x-4)^2}$$

1) Область определения $(x-4)^2\neq 0$, $x\neq 4$. $D(y)=(-\infty;4)\cup(4;+\infty)$. Точка разрыва $x=4$.
Рассмотрим односторонние пределы в этой точке:

$$\lim_{x\to 4\pm 0}-\frac{9x+2}{(x-4)^2}=-\frac{36+2}{+0}=-\infty.$$

Получаем, что $x=4$ - вертикальная асимптота.

2) Точки пересечения с осями координат:

Ox: $y(x)=-\dfrac{9x+2}{(x-4)^2}=0$, $x=-2/9$, точка (-2/9; 0) = $(-0,222;0)$.

Oy: $x=0,\Rightarrow y=-\dfrac{1}{8}$, точка (0; -1/8) = $(0;-0,125)$.

3) Функция общего вида, так как

$$y(-x)=-\frac{9(-x)+2}{(-x-4)^2}=-\frac{-9x+2}{(x+4)^2}\neq\pm y(x).$$

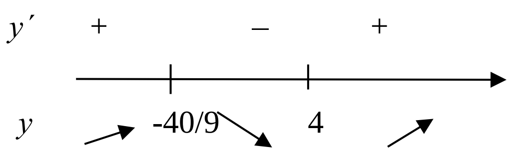
4) Экстремумы и монотонность. Вычисляем первую производную:

$$y'=\left(-\frac{9x+2}{(x-4)^2}\right)'=-\frac{9(x-4)^2-(9x+2)2(x-4)}{(x-4)^4}=-\frac{9(x-4)-(9x+2)2}{(x-4)^3}=$$

$$=-\frac{9x-36-18x-4}{(x-4)^3}=\frac{9x+40}{(x-4)^3}$$

Находим критические точки (производная равна нулю или не существует):
$x_1=-40/9\approx-4,44$, $x_2=4$.

Исследуем знак производной на интервалах, на которые критические точки делят области определения функции.



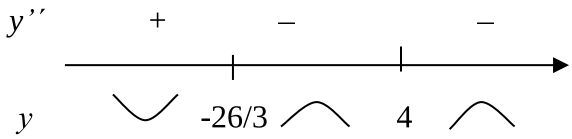
Функция убывает на интервале $(-40/9;4)$, возрастает на интервалах $(-\infty;-40/9)$, $(4;+\infty)$.

Функция имеет максимум при $x=-4,44$, $f(-4,44)\approx 0,53$.

5) Выпуклость и точки перегиба. Вычисляем вторую производную:

$$y''=\left(\frac{9x+40}{(x-4)^3}\right)'=\frac{9(x-4)^3-(9x+40)3(x-4)^2}{(x-4)^6}=\frac{9(x-4)-(9x+40)3}{(x-4)^4}=$$
$$=3\frac{3x-12-9x-40}{(x-4)^4}=-6\frac{3x+26}{(x-4)^4}.$$

Находим критические точки (производная равна нулю или не существует):
$x_1=-26/3\approx -8,67$, $x_2=4$.
Исследуем знак производной на интервалах, на которые критические точки делят области определения функции.



Функция выпукла вверх на интервалах $(-26/3;4)$, $(4;+\infty)$, выпукла вниз на интервале $(-\infty;-26/3)$. Точка перегиба $x=-26/3$, $f(-26,3)\approx 0,47$

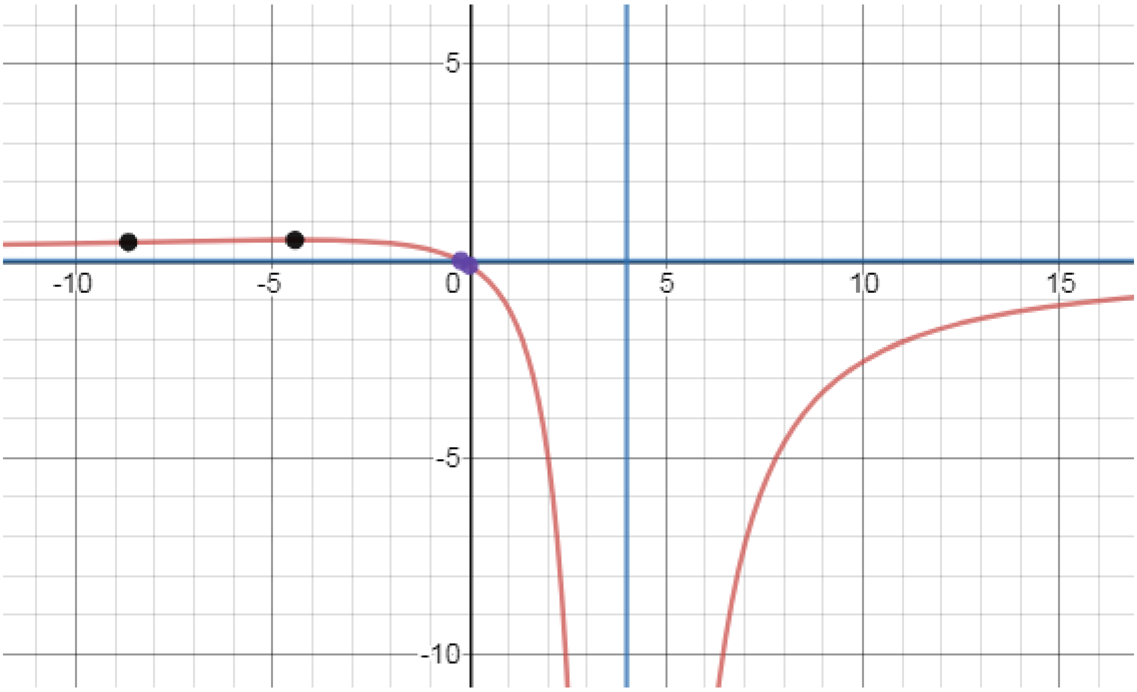
6) Найдем наклонные асимптоты вида $y=kx+b$.

$$k=\lim_{x\to\infty}\frac{y}{x}=-\lim_{x\to\infty}\frac{9x+2}{(x-4)^2x}=-\lim_{x\to\infty}\frac{9+2/x}{(x-4)^2}=0,$$

$$b=\lim_{x\to\infty}(y-kx)=\lim_{x\to\infty}\left(-\frac{9x+2}{(x-4)^2}\right)=-\lim_{x\to\infty}\frac{9+2/x}{(x-4)(1-4/x)}=0$$

Получили горизонтальную асимптоту $y=0$.

7) Строим график (красным) и отмечаем ключевые точки (нули фиолетовым, перегиб и максимум черным) и асимптоты (синим):



Поближе точки: