Тема: Полное исследование функции

Задание. *Исследовать функцию с помощью производной и построить график.*
$f(x)=(x-5)(x-3)^3$

Решение:

Область определения функции
D(y): $x\in(-\infty;+\infty)$

1. Координаты точек пересечения с осями ординат
$f(0)=(0-5)(0-3)^3=-5\cdot(-27)=135$
$f(x)=0$
$(x-5)(x-3)^3=0$
$x_1=3;\ x_2=5$

2. Чётность, нечётность функции
$f(-x)=(-x-5)(-x-3)^3=(x+5)(x+3)^3\neq f(x)\neq -f(x)$
Функция не является ни четной, ни нечетной.
3. Асимптоты графика и пределы на плюс, минус бесконечности.
Уравнение наклонных асимптот $y=kx+b$.

$$k=\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to\infty}\frac{(x-5)(x-3)^3}{x}=\lim_{x\to\infty}\left(1-\frac{5}{x}\right)(x-3)^3=\infty$$

Наклонных асимптот нет.

$$\lim_{x\to-\infty}f(x)=\lim_{x\to-\infty}(x-5)(x-3)^3=+\infty$$

$$\lim_{x\to+\infty}f(x)=\lim_{x\to+\infty}(x-5)(x-3)^3=+\infty$$

4. Критические точки
$f'(x)=(x-5)'(x-3)^3+(x-5)((x-3)^3)'=(x-3)^3+(x-5)\cdot 3(x-3)^2=$
$=(x-3)^2(x-3+3x-15)=(x-3)^2(4x-18)$
$f'(x)=0$
Критические точки:
$x_1=3;\ x_2=\frac{9}{2}$
5. Интервалы монотонности и точки экстремума.
$y'\neq 0$
Функция возрастает при $y'>0$ и убывает при $y'<0$.

Занесем результаты исследования в таблицу.

x	$(-\infty;3)$	3	$\left(3;\ \frac{9}{2}\right)$	$\frac{9}{2}$	$\left(\frac{9}{2};+\infty\right)$
$f'(x)$	–	0	–	0	+
$f(x)$	↘	0	↘	min	↗

Функция убывает на промежутках $(-\infty;3)$ $\left(3;\ \frac{9}{2}\right)$

Функция возрастет на промежутке $\left(\frac{9}{2};+\infty\right)$

$x=\frac{9}{2}$ – точка минимума.

$$f\left(\frac{9}{2}\right)=\left(\frac{9}{2}-5\right)\left(\frac{9}{2}-3\right)^3=\left(\frac{9-10}{2}\right)\left(\frac{9-6}{2}\right)^3=\left(-\frac{1}{2}\right)\left(\frac{3}{2}\right)^3=-\frac{27}{16}\approx-1{,}7$$

6. Промежутки выпуклости и вогнутости, точки перегиба

$f''(x)=0$

$$f''(x)=((x-3)^2)'(4x-18)+(x-3)^2(4x-18)'=2(x-3)(4x-18)+4(x-3)^2=$$
$$=4(x-3)(2x-9+x-3)=4(x-3)(3x-12)=12(x-3)(x-4)$$

Точки перегиба:

$x_1=3;\ x_2=4$

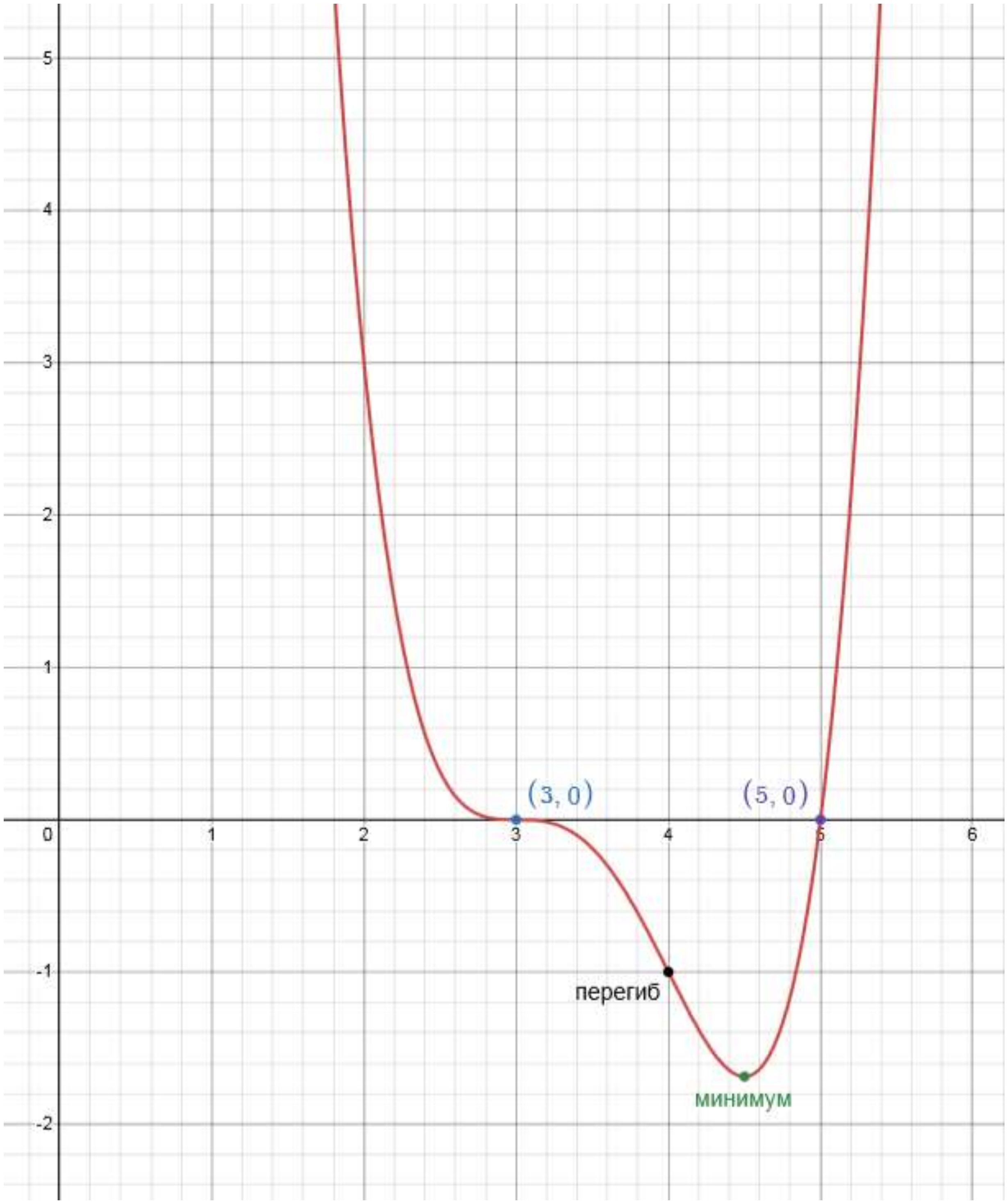
Занесем результаты исследования в таблицу.

x	$(-\infty;3)$	3	$(3;\ 4)$	4	$(4;+\infty)$
$f''(x)$	+	0	–	0	+
$f(x)$	$\cup$		$\cap$		$\cup$

В интервалах $(-\infty;3)$ и $(4;+\infty)$ кривая вогнутая.

В интервале $(3;\ 4)$ кривая выпуклая.

7. Построим график



8. Дополнительные точки, если нет асимптот

$$f(x)=(x-5)(x-3)^3$$

$$f(2)=(2-5)(2-3)^3=-3\cdot(-1)^3=3$$

$$f(4)=(4-5)(4-3)^3=-1\cdot 1^3=-1$$

9. Область значения функции

$x=\dfrac{9}{2}$ – точка минимума.

$$f\left(\frac{9}{2}\right)=-\frac{27}{16}$$

$$E(f)=\left(-\frac{27}{16};+\infty\right)$$