

Тема: Полное исследование функции

ЗАДАНИЕ. Исследовать функцию методами дифференциального исчисления и построить график.

$$y = \frac{x^3}{x^2 - 1}$$

РЕШЕНИЕ:

1) Область определения функции $x \neq \pm 1$, то есть $D(y) = (-\infty; -1) \cup (-1; 1) \cup (1; +\infty)$. Точки разрыва $x = 1$ и $x = -1$. Вычислим односторонние пределы:

$$\lim_{x \rightarrow -1-0} \frac{x^3}{x^2 - 1} = \frac{-1}{+0} = -\infty, \quad \lim_{x \rightarrow -1+0} \frac{x^3}{x^2 - 1} = \frac{-1}{-0} = +\infty,$$

$$\lim_{x \rightarrow 1-0} \frac{x^3}{x^2 - 1} = \frac{1}{-0} = -\infty, \quad \lim_{x \rightarrow 1+0} \frac{x^3}{x^2 - 1} = \frac{1}{+0} = +\infty.$$

Получаем, что $x = 1$ и $x = -1$ - вертикальные асимптоты.

2) Точки пересечения с осями координат:

$$Ox: y = \frac{x^3}{x^2 - 1} = 0, \quad x = 0, \text{ точка } (0,0).$$

$$Oy: x = 0, \Rightarrow y = 0, \text{ точка } (0,0).$$

3) Функция нечетная, так как

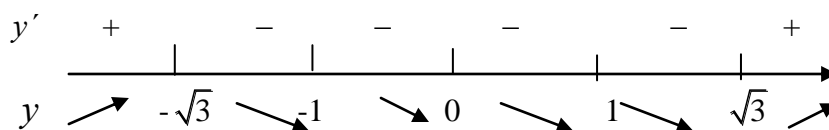
$$y(-x) = \frac{(-x)^3}{(-x)^2 - 1} = -\frac{x^3}{x^2 - 1} = -y(x)$$

График симметричен относительно начала координат.

4) Экстремумы и монотонность. Вычисляем первую производную:

$$\begin{aligned} y'(x) &= \left(\frac{x^3}{x^2 - 1} \right)' = \frac{3x^2(x^2 - 1) - x^3 \cdot 2x}{(x^2 - 1)^2} = \frac{3x^4 - 3x^2 - 2x^4}{(x^2 - 1)^2} = \frac{x^4 - 3x^2}{(x^2 - 1)^2} \\ &= \frac{x^2(x^2 - 3)}{(x^2 - 1)^2} = \frac{x^2(x - \sqrt{3})(x + \sqrt{3})}{(x - 1)^2(x + 1)^2}. \end{aligned}$$

Находим критические точки: $x = \pm\sqrt{3}$, $x = 0$, $x = \pm 1$. Исследуем знак производной на интервалах, на которые критическая точка делит область определения функции.



Функция возрастает на интервалах $(-\infty; -\sqrt{3})$, $(\sqrt{3}; +\infty)$, убывает на интервалах $(-\sqrt{3}; -1)$, $(-1; 0)$, $(0; 1)$, $(1; \sqrt{3})$. Функция имеет минимум при $x = \sqrt{3} \approx 1,73$,

$$y(\sqrt{3}) = \frac{3\sqrt{3}}{2} = 2,6. \text{ Функция имеет максимум при } x = -\sqrt{3} \approx -1,73,$$

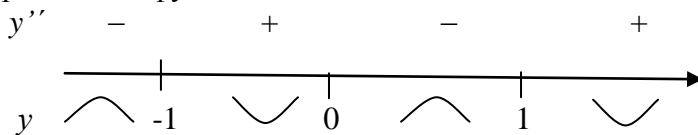
$$y(-\sqrt{3}) = -\frac{3\sqrt{3}}{2} = -2,6.$$

5) Выпуклость и точки перегиба. Вычисляем вторую производную.

$$\begin{aligned} y''(x) &= \left(\frac{x^4 - 3x^2}{(x^2 - 1)^2} \right)' = \frac{(4x^3 - 6x)(x^2 - 1)^2 - (x^4 - 3x^2)2x2(x^2 - 1)}{(x^2 - 1)^4} = \\ &= x \frac{(4x^2 - 6)(x^2 - 1) - 4(x^4 - 3x^2)}{(x^2 - 1)^3} = x \frac{4x^4 - 6x^2 - 4x^2 + 6 - 4x^4 + 12x^2}{(x^2 - 1)^3} =, \\ &= x \frac{6 + 2x^2}{(x^2 - 1)^3}. \end{aligned}$$

Приравниваем к нулю и находим критические точки: $x = 0, x = 1, x = -1$.

Исследуем знак производной на интервалах, на которые критические точки делят области определения функции.



Функция выпукла вверх на интервалах $(-\infty; -1), (0; 1)$, выпукла вниз на интервалах $(-1; 0), (1; +\infty)$. Точка перегиба: $x = 0, f(0) = 0$.

6) Наклонные асимптоты вида $y = kx + b$.

$$k = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{y}{x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^3}{x(x^2 - 1)} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2}{x^2 - 1} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{1 - 1/x^2} = 1,$$

$$b = \lim_{x \rightarrow \infty} (y - kx) = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x^3}{(x^2 - 1)} - x \right) = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^3 - x^3 + x}{(x^2 - 1)} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x}{(x^2 - 1)} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{(x - 1/x)} = 0.$$

Наклонная асимптота $y = x$.

7) Строим график функции и асимптоту, отмечая ключевые точки:

